



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-8)^3}{2^3} + \frac{(-12)^3}{(-3)^3} + 10 \right) \cdot \left(\frac{(-8)^2}{2^2} + \frac{(-12)^2}{(-3)^2} - 22 \right).$$

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές (AB = ΑΓ), με $\hat{A} = 40^\circ$, και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} . Επίσης τα τρίγωνα ABE και ABH είναι ισοσκελή με EA = EB και AB = AH.

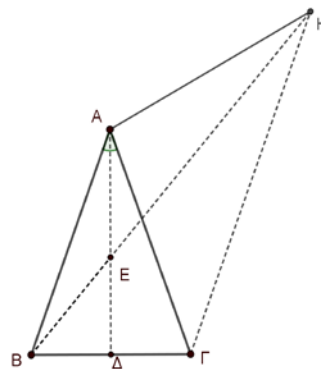
Να αποδείξετε ότι:

(α) $\hat{A}HB = 20^\circ$,

(β) $\hat{A}GH = 40^\circ$,

(γ) η HB είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}HG$.

Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.



Πρόβλημα 3

Ο Νίκος επισκέφθηκε για ψώνια 3 καταστήματα στη σειρά. Στο πρώτο κατάστημα ξόδεψε 30 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που είχε μαζί του. Στο δεύτερο κατάστημα ξόδεψε 40 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το πρώτο κατάστημα. Στο τρίτο κατάστημα ξόδεψε 50 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το δεύτερο κατάστημα. Αν μετά την αγορά του στο τρίτο κατάστημα τελείωσαν τα χρήματα του, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του όταν ξεκίνησε τις αγορές του.

Πρόβλημα 4

Τρεις θετικοί ακέραιοι α, β και γ , με $\alpha < \beta < \gamma$, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον ακέραιο 72 και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τον ακέραιο 1008. Αν γνωρίζετε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β ισούται με το μέγιστο κοινό διαιρέτη των β, γ , να βρείτε τις δυνατές τιμές των α, β, γ .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}} + \frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}} \right) \cdot (-2018)^2 + \left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}} - \left(\frac{1}{4} \right)^{-20} \right) + 200.$$

Πρόβλημα 2

Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

Σημείωση: Ο μέσος όρος n αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι ο αριθμός $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου α , για τις οποίες η εξίσωση $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-\alpha}{x-6}$

έχει ακέραιες λύσεις.

Πρόβλημα 4

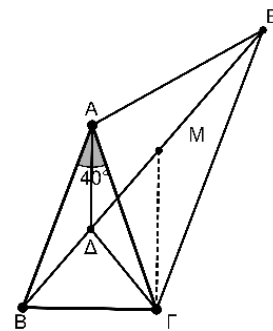
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB=AG$) με $\widehat{A} = 40^\circ$ και για το σημείο Δ ισχύει ότι: $\Delta A = \Delta B = \Delta \Gamma$. Αν η ΓM είναι παράλληλη στην $A\Delta$ και το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές ($AB = AE$), να αποδείξετε ότι:

(α) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας \widehat{A} .

(β) $\widehat{GAE} = 100^\circ$.

(γ) η AM είναι κάθετη στην GE .

Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x που ικανοποιούν συγχρόνως την εξίσωση

$$(x-1)(x^2-7x+10)=0$$

και την ανίσωση

$$\frac{x(x-1)}{2}-2 < \frac{x(x-5)}{2}+6.$$

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\frac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-36\beta^4}=1$, να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$K = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}.$$

Πρόβλημα 3

Να συγκριθούν οι αριθμοί

$$A = \frac{2}{3} + \frac{2}{6} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{99}$$

και

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{95} + \frac{1}{97} + \frac{1}{98} + \frac{1}{100}$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με $\widehat{A} = 30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ και τετράγωνο $A\Gamma E Z$. Αν το σημείο M είναι το μέσο της $A\Delta$ και το σημείο K είναι το συμμετρικό της κορυφής B ως προς το σημείο M , να αποδείξετε ότι:

(α) Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

(β) Οι ευθείες AK , EM και $\Delta\Gamma$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\frac{26\alpha^3\beta^3}{\alpha^6 - 27\beta^6} = -1$, να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$K = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w είναι όλοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1 και μικρότεροι ή ίσοι του 5 και επιπλέον ισχύει ότι $x + y + z + w = 8$, να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης

$$A = x^2 + y^2 + z^2 + w^2.$$

Πρόβλημα 3

Αν ο τετρανήφιος ακέραιος $A = \overline{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0} = \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$, να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9 \cdot A$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η παράλληλη από το O προς την $A\Gamma$ τέμνει την AB στο σημείο Δ . Ο περιγεγραμμένος κύκλος, έστω (c_1) , του τριγώνου $A\Delta O$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E και το κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο Z . Έστω ότι η ΔZ τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο H . Να αποδείξετε ότι:

- (α) Τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και $O\Gamma E$ είναι ίσα.
- (β) Τα τρίγωνα OZE και $O\Gamma E$ είναι ίσα.
- (γ) Τα σημεία Γ, O, H είναι συνευθειακά.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$x^4 - x^3 - 18x^2 + 3x + 9 = 0 ,$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Πρόβλημα 2

Αν ο πεντανήφιος ακέραιος $A = \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0} = \alpha_4 \cdot 10^4 + \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0$, να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9 \cdot A$.

Πρόβλημα 3

Αν οι αριθμοί x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι, να λύσετε το σύστημα:

$$x + 2y^2 = 3z^3$$

$$y + 2z^2 = 3x^3$$

$$z + 2x^2 = 3y^3$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ (με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η εφαπτομένη στο B του κύκλου (c) τέμνει την ευθεία $\Delta\Gamma$ στο σημείο E . Έστω M είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

(α) Η ευθεία AD είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου, έστω (c_1), του τριγώνου ΔBE .

(β) Το σημείο M ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο, έστω (c_2), του τριγώνου $OB\Gamma$.

(γ) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΔBE και $OB\Gamma$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο B .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες