Μαθηματικά Προσανατολισμού Β΄ Λυκείου

Συντεταγμένες στο επίπεδο

Επιμέλεια Κων/νος Παπασταματίου

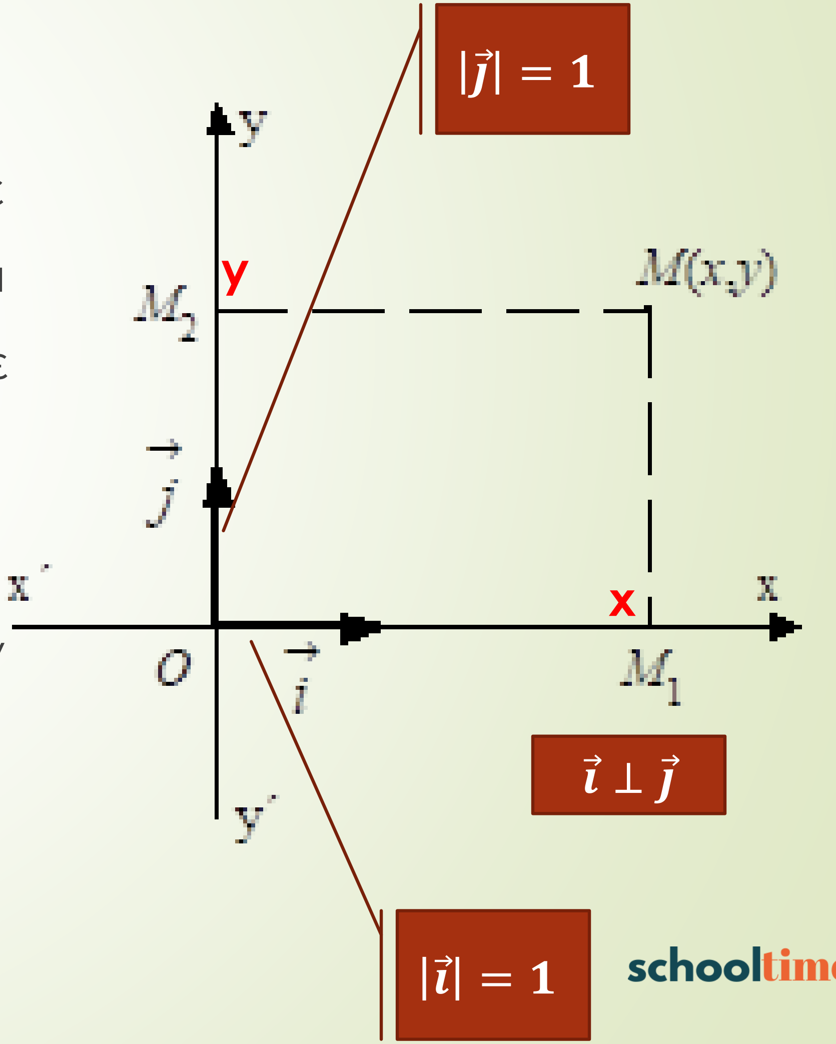
Άξονας

- Πάνω σε μια ευθεία επιλέγουμε δύο σημεία Ο και Ι, έτσι ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ να έχει μέτρο 1 και να βρίσκεται στην ημιευθεία Ox . Λέμε τότε ότι έχουμε έναν **άξονα με αρχή το Ο** και **μοναδιαίο διάνυσμα το $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \vec{\imath}$** και τον συμβολίζουμε με $x'x$. Η ημιευθεία $\mathrm{O}x$ λέγεται θετικός ημιάξονας $\mathrm{O}x$, ενώ η Ox' λέγεται αρνητικός ημιάξονας Ox' .

- Αν, τώρα, πάνω στον άξονα $x'x$ πάρουμε ένα σημείο Μ, επειδή $\overrightarrow{OM} \parallel \vec{\imath}$, θα υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{\imath}$.

Καρτεσιανό Επίπεδο

- Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή Ο και μοναδιαία διανύσματα τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$. Λέμε τότε ότι έχουμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων** στο επίπεδο ή απλούστερα ένα **σύστημα συντεταγμένων** στο επίπεδο ή ακόμα ένα καρτεσιανό επίπεδο και το συμβολίζουμε με $\boldsymbol{Oxy}$.
- Πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο παίρνουμε ένα σημείο Μ. Από το Μ φέρνουμε την παράλληλη στον $y'y$, που τέμνει τον $x'x$ στο M_1, και την παράλληλη στον $x'x$, που τέμνει τον $y'y$ στο M_2 . Αν x είναι η τετμημένη του M_1 ως προς τον άξονα $x'x$ και y η τετμημένη του ως προς τον άξονα $y'y$, τότε ο x λέγεται **τετμημένη** του Μ και ο y **τεταγμένη** του Μ. Η τετμημένη και η τεταγμένη λέγονται **συντεταγμένες** του Μ. Έτσι σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος συντεταγμένων.



Συντεταγμένες Διανύσματος

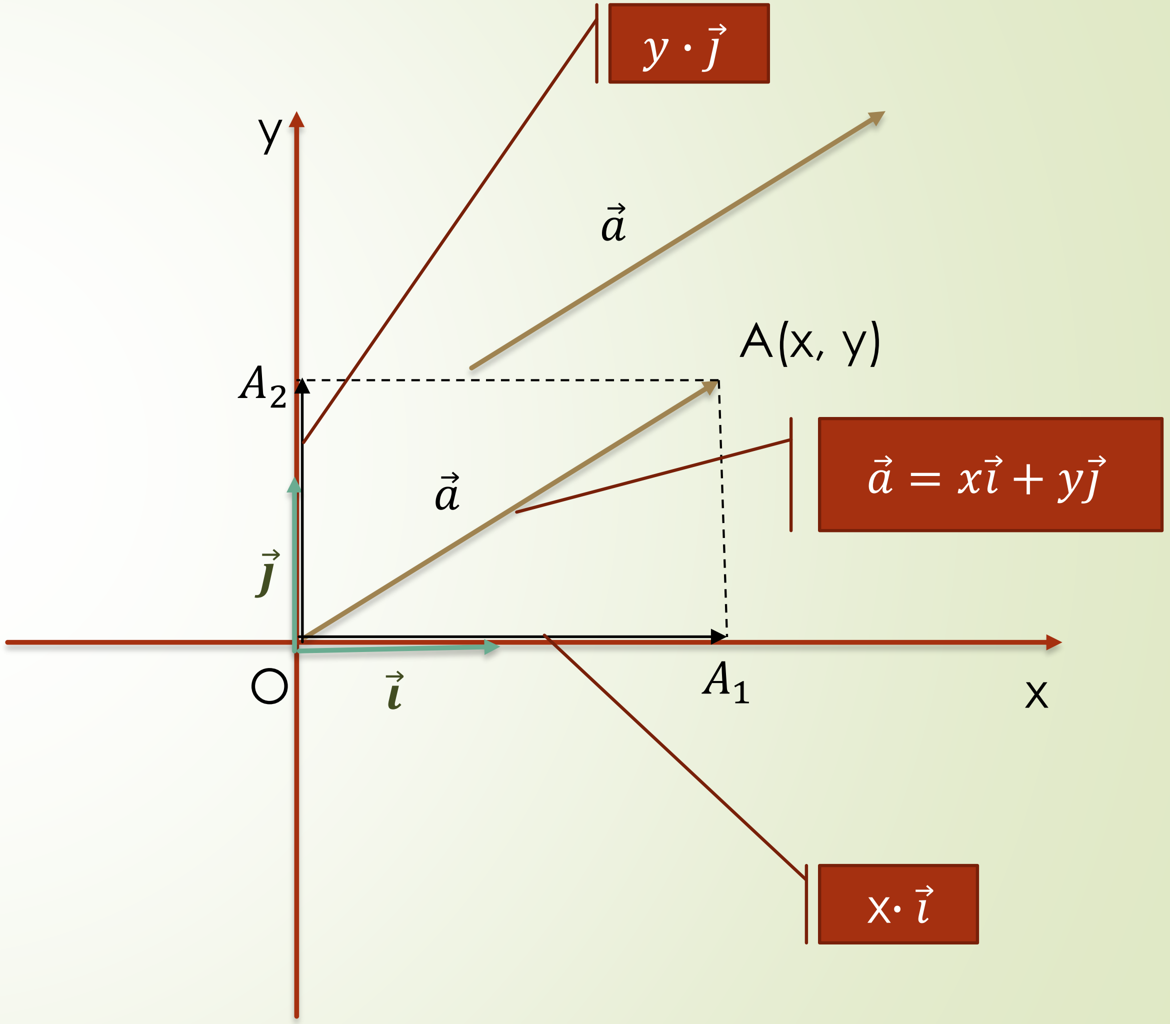
- Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\vec{a}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου. Με αρχή το O σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, έχουμε:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OA_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OA_2}} \quad (1)$$

- Αν x, y είναι οι συντεταγμένες του A , τότε ισχύει $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$ και $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$. Επομένως η ισότητα (1) γράφεται

$$\boldsymbol{\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}}$$

Συντομογραφία $\boldsymbol{\vec{a} = (x, y)}$



“Κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ”

Ισότητα Διανυσμάτων

- “Έστω $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ και $\vec{\beta} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$. Ισχύει ότι $\vec{a} = \vec{\beta}$ αν και μόνο αν $\boldsymbol{x_1 = x_2}$ **και** $\boldsymbol{y_1 = y_2}$

$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\\ \vec{\beta} &= x_2\vec{i} + y_2\vec{j}\end{aligned}\right\} \qquad \vec{a} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{και} \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \text{και} \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες”.

Συντεταγμένες Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων

- Έστω $\vec{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ και $\vec{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$. Ισχύει ότι:

➤ $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Προσθέτουμε τα x με τα x και τα y με τα y

➤ $\lambda \cdot \vec{\alpha} = (\lambda \cdot x_1 , \lambda \cdot y_1)$

Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό λ και με τα x και με τα y

➤ $\lambda \cdot \vec{\alpha} + \mu \cdot \vec{\beta} = (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 , \quad \lambda \cdot y_1 + \mu \cdot y_2)$

Συντεταγμένες Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}) \text{ και } \vec{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$$

$$\vec{a} + \vec{\beta} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\vec{a} + \vec{\beta} = (-2, +4) + (-3, +5) =$$

$$(-2 + (-3), +4 + +5) = (-5, +9)$$

Συντεταγμένες Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων

- Έστω $\vec{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (x_1, y_1) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1)$$

$$\lambda \cdot \vec{a} = -3\,(-2\,,\,5) = (-3 \cdot (-2)\,,\,-3 \cdot 5)$$

$$= (6\,,\,-15)$$

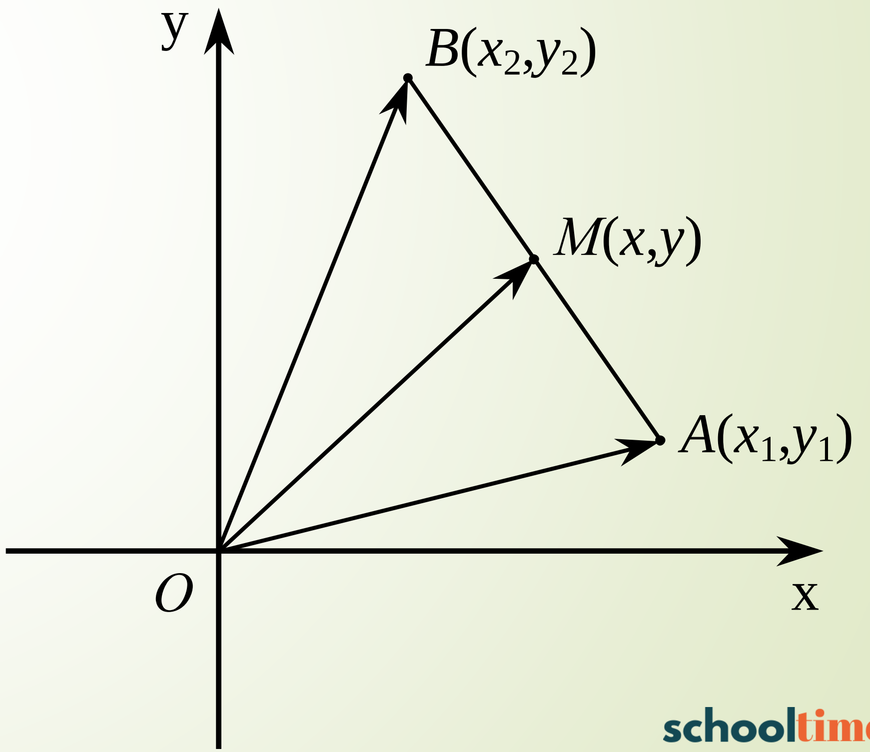
Συντεταγμένες Μέσου Τμήματος

- Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_A, y_A)$και $B(x_B, y_B)$. Αν $M(x_M, y_M)$ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ τότε:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

και

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$



Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα

- Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_A, y_A)$και $B(x_B, y_B)$. Τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ θα έχει συντεταγμένες $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

Αρχή

Τέλος

$A(-3, -2)$ $B(-5, 3)$

$\overrightarrow{AB} = (-5 - -3, 3 - -2) = (-2, 5)$

y της αρχής

x του τέλους

x της αρχής

y του τέλους

Μέτρο Διανύσματος

Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$, τότε $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$

Η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι ίση με

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

- **Έστω** $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$.

Ως ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ορίζουμε την ποσότητα

Πρώτη γραμμή, συντεταγμένες του $\vec{\alpha}$ διανύσματος

$$\det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Κύρια Διαγώνιος

Δεύτερη γραμμή, συντεταγμένες του $\vec{\beta}$ διανύσματος

Δευτερεύουσα Διαγώνιος

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

- **Έστω** $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$.

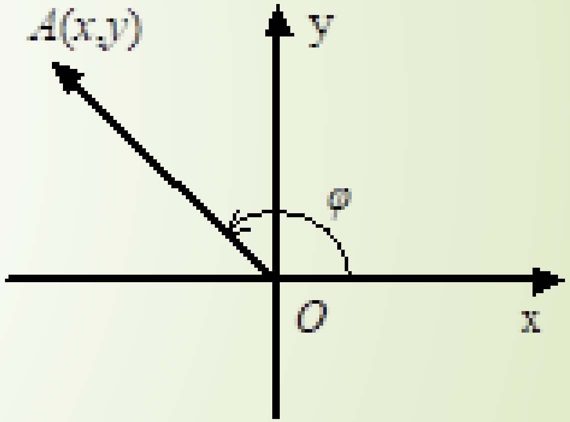
Ισχύει ότι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ αν και μόνο αν

$$det\left(\vec{a}, \vec{\beta}\right) = 0$$

Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος

- • Έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα και A το σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$. Τη γωνία φ , που διαγράφει ο ημιάξονας αν στραφεί γύρω από το O κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OA, την ονομάζουμε **γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$** . Είναι φανερό ότι

$$\mathbf{0 \le \varphi \le 2\pi}$$



- Για τη γωνία φ , όπως είναι γνωστό από την Τριγωνομετρία, αν το $\vec{\alpha}$ δεν είναι παράλληλο προς τον άξονα $y'y$, ισχύει

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\varphi = \frac{y}{x}}$$

Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος

Το πηλίκο $\frac{y}{x}$ της τεταγμένης προς την τετμημένη του διανύσματος $\vec{\alpha}=(x,y)$, με $x\neq 0$, το λέμε **συντελεστή διεύθυνσης** του $\vec{\alpha}$ και τον συμβολίζουμε με $\lambda_{\vec{\alpha}}$ ή απλώς με λ. Επομένως:

$$\boxed{\lambda=\frac{y}{x}=\varepsilon\varphi\varphi}$$

Είναι φανερό ότι

— Αν $y=0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha}// x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι ο $\lambda=0$.

— Αν $x=0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha}// y'y$, τότε **δεν ορίζεται** συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

- Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$.

Ισχύει ότι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ αν και μόνο αν $\lambda_1 = \lambda_2$

<u>Προσοχή!!!</u> Για να κάνουμε χρήση του συντελεστή διεύθυνσης πρέπει πρώτα να έχουμε διασφαλίσει ότι τα διανύσματα δεν είναι κατακόρυφα, δλδ παράλληλα στον άξονα $y'y$