

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

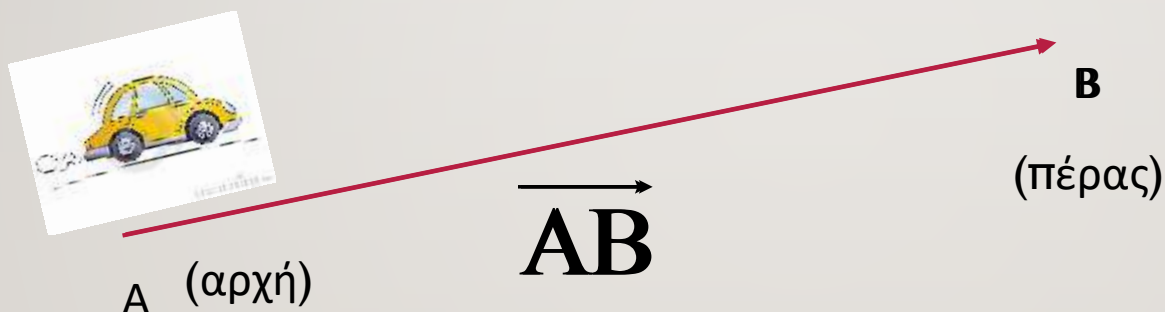
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- **Ευκλείδεια Γεωμετρία** (σημείο, ευθεία, επίπεδο, χώρος)
- **Μονόμετρα μεγέθη** (αρκεί μόνο το μέτρο τους)
- **Διανυσματικά μεγέθη** (θέλουμε επιπλέον στοιχεία για την περιγραφή τους)
- **Διανύσματα**

3 ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Διάνυσμα καλούμε ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα



Μια από τις βασικές διαφορές μεταξύ διανύσματος και ευθύγραμμου τμήματος είναι ότι εκτός από το μήκος έχουμε την κατεύθυνση της κίνησης.

Στο παραπάνω διάνυσμα, θα κάνουμε την διαδρομή από το σημείο Α προς το σημείο Β

4 ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

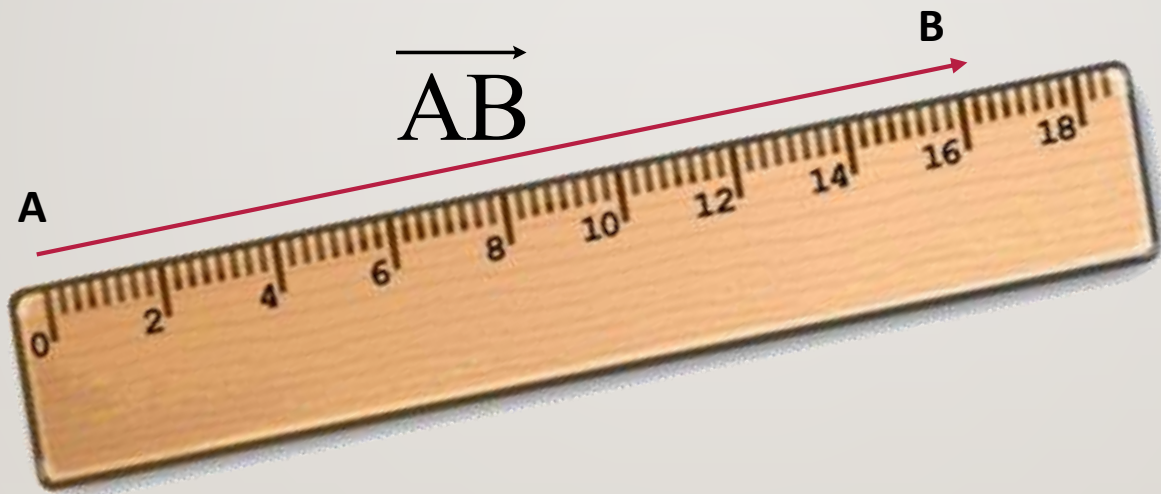
- Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται μηδενικό.

A
●

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA}$$

5 ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

- Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος \overrightarrow{AB} , δηλαδή το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB , λέγεται **μέτρο** ή **μήκος** του διανύσματος \overrightarrow{AB} και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$



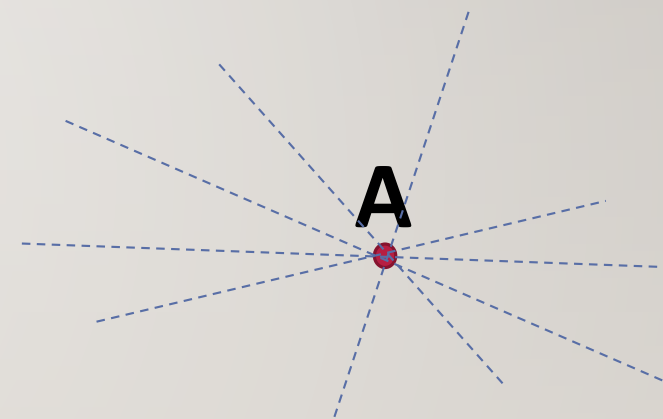
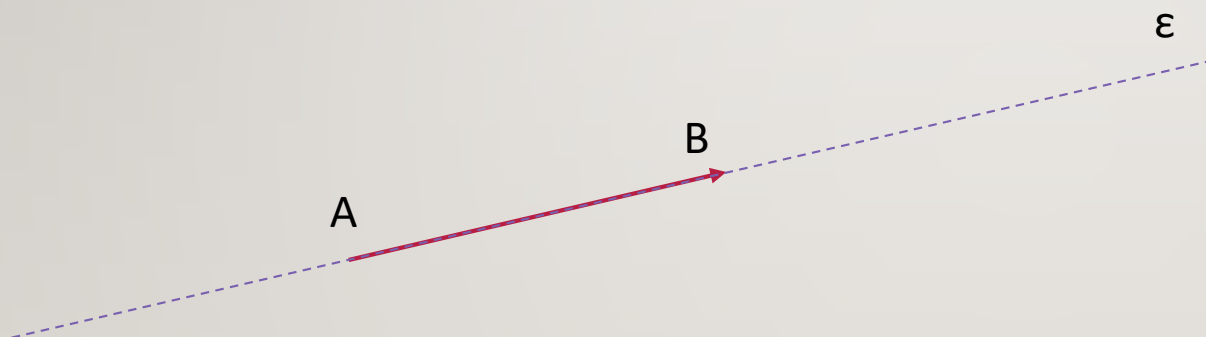
- Αν το διάνυσμα έχει μέτρο ένα, τότε θα λέγεται μοναδιαίο διάνυσμα.

6 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

- **Προσοχή!!!** Το μέτρο ενός διανύσματος είναι πάντοτε **μη αρνητικός αριθμός**. Το μέτρο **ΔΕΝ είναι διάνυσμα**.
- Ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| \geq 0$ για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$
- $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$
- Αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, τότε $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ **Προσοχή!!!** Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε

7 ΦΟΡΕΑΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

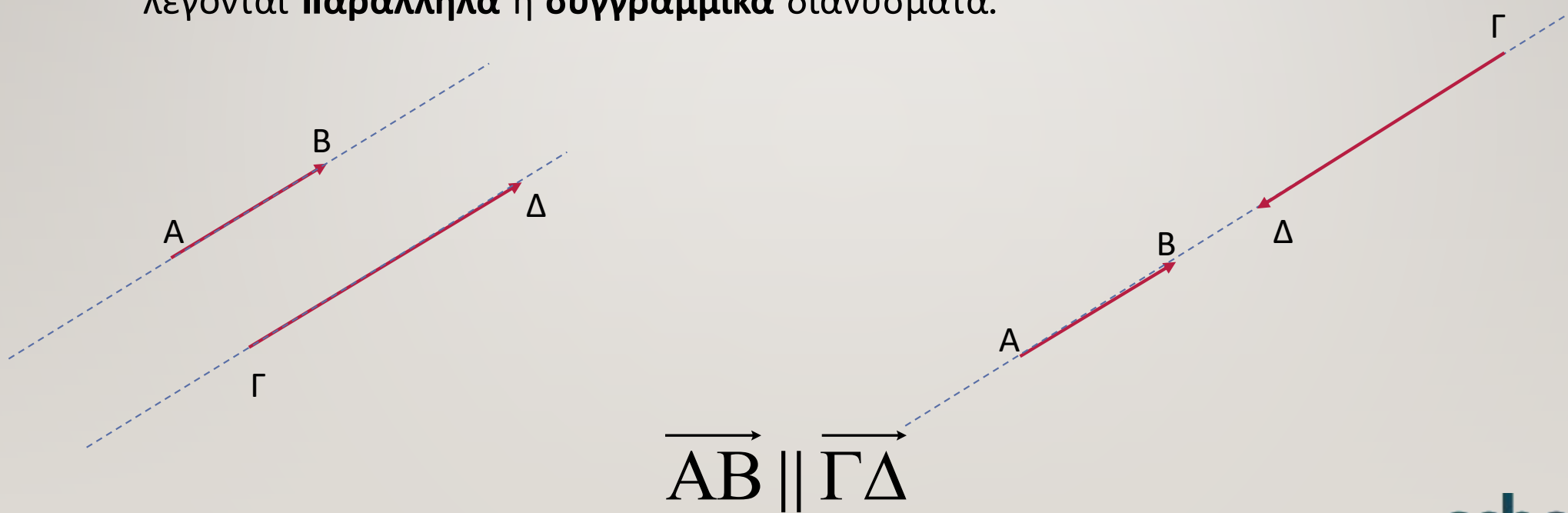
- Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα \overrightarrow{AB} λέγεται φορέας του \overrightarrow{AB}



- Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το A

8 ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ Ή ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

- Δύο μη μηδενικά διανύσματα \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ που έχουν τον ίδιο ή παράλληλους φορείς, λέγονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά** διανύσματα.



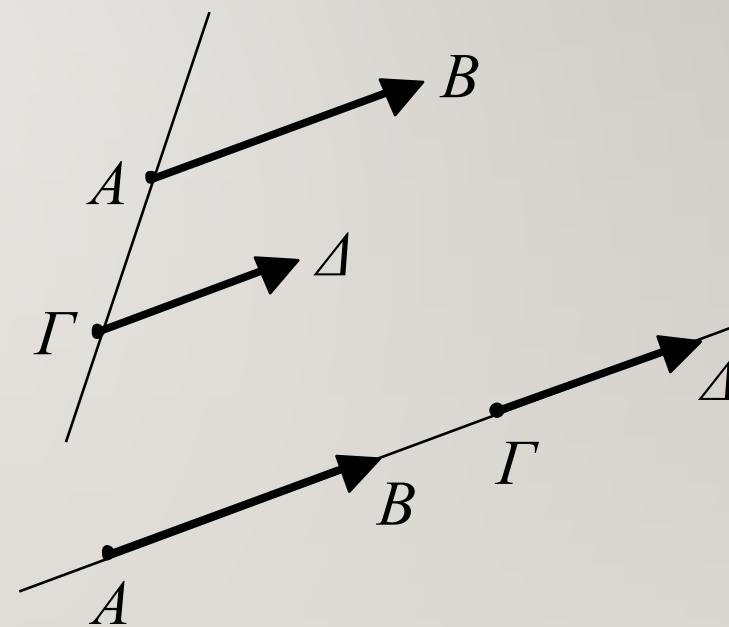
9 ΟΜΟΡΡΟΠΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

- Δύο μη μηδενικά διανύσματα \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται ομόρροπα:

A) όταν έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως την ευθεία ΑΓ που ενώνει τις αρχές τους ή

B) όταν έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες ΑΒ και ΓΔ περιέχει την άλλη.

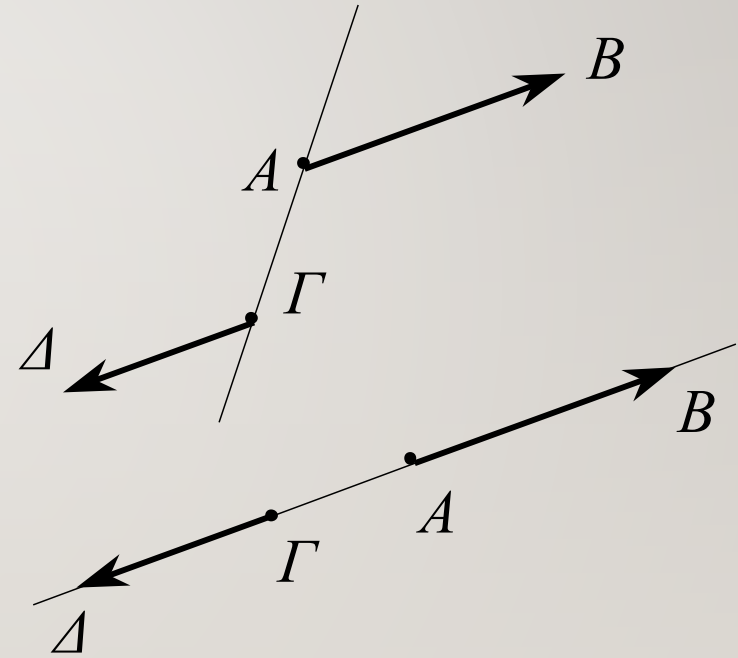
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουν την ίδια **κατεύθυνση** και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$



10 ΑΝΤΙΡΡΟΠΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

- Δύο μη μηδενικά διανύσματα \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται αντίρροπα, όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \updownarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$



ΙΙ ΙΣΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

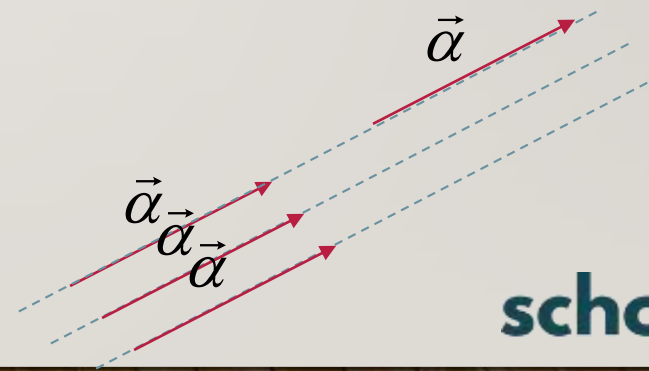
- Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ίσα** όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

Δηλαδή $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{\Gamma\Delta} \\ |\vec{AB}| = |\vec{\Gamma\Delta}| \end{cases}$

είναι ομόρροπα, δηλ
παράλληλα και κοιτάζουν
προς το ίδιο μέρος

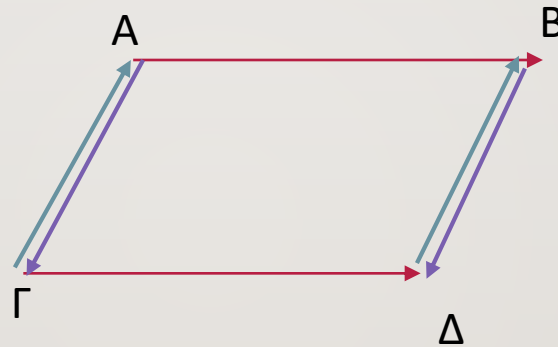
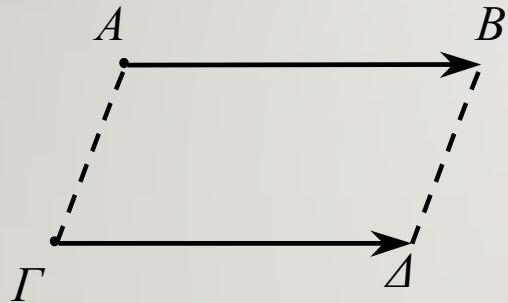
έχουν το ίδιο μέτρο, δηλ
το ίδιο μήκος

Η γεωμετρική ερμηνεία του ορισμού είναι ότι η παράλληλη μετατόπιση δεν μεταβάλλει το διάνυσμα



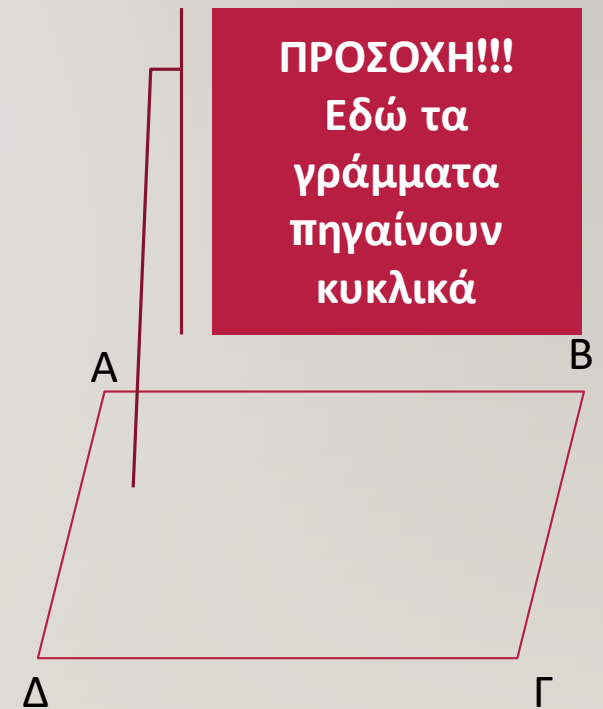
12 ΚΑΝΟΝΑΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

- Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$



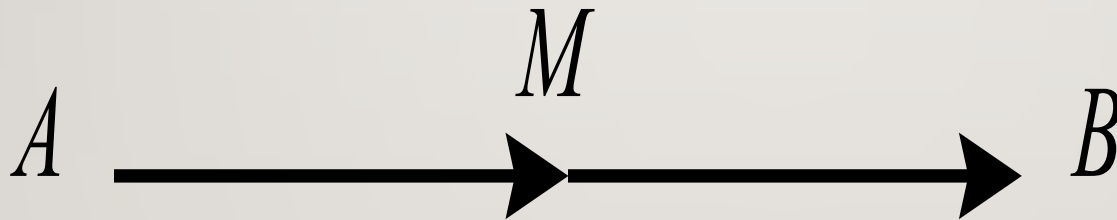
- Αν ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο τότε ισχύουν οι σχέσεις $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$ αντίστροφα

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$$
$$\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$$



13 ΜΕΣΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

- Αν M το μέσον του AB , τότε $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$



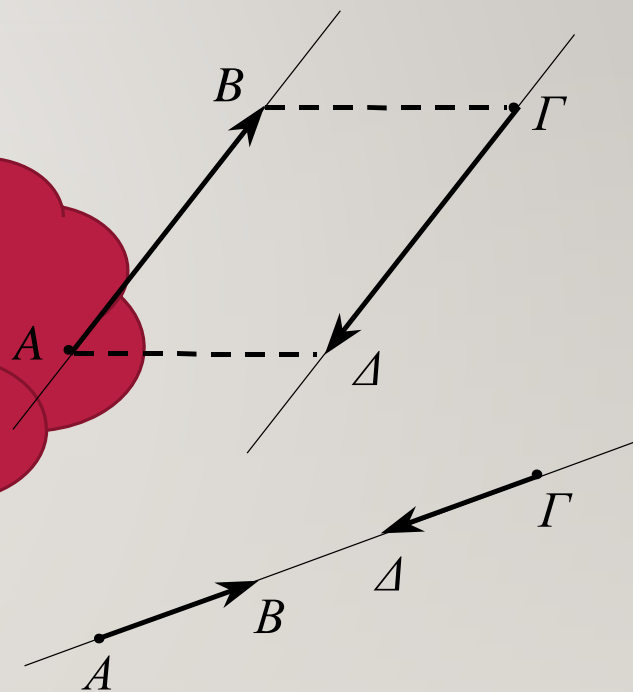
14 ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

- Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα**, όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

$$\vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta}$$

- Ειδικότερα: $\vec{AB} = -\vec{BA}$

Αν αλλάξουμε την σειρά των γραμμάτων σε ένα διάνυσμα, αλλάζουμε και το πρόσημό του



ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

- Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$
- Την κυρτή γωνία AOB , που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB , την ονομάζουμε γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
 $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \theta$
- Ισχύει ότι: $0 \leq \theta \leq 180$ ή $0 \leq \theta \leq \pi$

Η γωνία δύο διανυσμάτων είναι η εσωτερική και είναι πάντοτε μικρότερη από 180

