ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.3 Δυνάμεις φυσικών αριθμών

Δραστηριότητες για το σπίτι

Δραστηριότητα 1η

Χρησιμοποίησε μόνο τα σύμβολα των πράξεων: + και · και τις παρενθέσεις «(« και «)» για να συμπληρώσεις τις γραμμές ώστε να προκύψουν σωστές ισότητες.

1	**2**	**3**	**4**	**=**	**13**
1	**2**	**3**	**4**	**=**	**14**
1	**2**	**3**	**4**	**=**	**15**
1	**2**	**3**	**4**	**=**	**36**

Αρχικά βρίσκουμε ποια αθροίσματα (ή ποια γινόμενα, σε περίπτωση που το αποτέλεσμα είναι σύνθετος αριθμός), δύο αριθμών μας δίνουν το επιθυμητό αποτέλεσμα και στη συνέχεια προσπαθούμε να βρούμε αν υπάρχει τρόπος να καταλήξουμε στους αριθμούς αυτούς ακολουθώντας τις οδηγίες της άσκησης.

Λύση

➪ 1 2 3 4 = 13

Το 13 δεν μπορεί να προκύψει ως γινόμενο (είναι πρώτος αριθμός). Επομένως πρέπει να είναι άθροισμα που περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα γινόμενο (αφού 1 + 2 +3 +4 = 10 < 13)

Είναι: 13= 1+ 12, αλλά δεν υπάρχει τρόπος με τη χρήση των συμβόλων «+», «-» και παρενθέσεων από τους αριθμούς 2, 3, 4 να προκύψει το 12

Είναι: 13 =2 +11 αλλά αν 1·2 =2 από τους αριθμούς 3 και 4 δεν προκύπτει το 11.

Είναι: 13= 3+10 αλλά αν 1+ 2= 3 από τους αριθμούς 3 και 4 δεν προκύπτει το 10.

Είναι: 13= 4+9 =9 + 4

Παρατηρούμε ότι: (1+2) · 3 = 3 · 3 = 9

οπότε: **(1 +2) · 3 + 4 = 13** είναι η ζητούμενη λύση.

Συνεχίζοντας τη διερεύνηση όπως προηγουμένως καταλήγουμε ότι η λύση αυτή είναι μοναδική.

- 1 2 3 4 = 14
  - Το 14 μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ως εξής: $2 \cdot 7 = 14$. Εύκολα λοιπόν παρατηρούμε ότι μπορούμε να καταλήξουμε στο γινόμενο αυτό ως εξής:

    $(1 \cdot 2) \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$
  - Στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχει και δεύτερη λύση, αν γράψουμε το 14 ως άθροισμα γινομένων. Είναι: $14 = 2 + 12$, αλλά $1 \cdot 2 = 2$ και $3 \cdot 4 = 12$. Επομένως : **$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 14$**

Η πρώτη παρένθεση θα μπορούσε να παραληφθεί, χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα. Μπαίνει, απλά, για να «δημιουργηθεί» ο παράγοντας 2.

  - Το 14 μπορεί να γραφεί ως γινόμενο και ως εξής: $1 \cdot 14 = 14$. Στο γινόμενο αυτό μπορούμε να καταλήξουμε ως εξής:

    $1 \cdot (2 + 3 \cdot 4) = 1 \cdot (2 + 12) = 1 \cdot 14 = 14$

- 1 2 3 4 = 15

Το 15 μπορεί να γραφεί ως γινόμενο των αριθμών 3 και 5. Αλλά, ενώ $1 + 2 = 3$, από τους 3 και 4 δεν μπορεί να προκύψει το 5. (Το 15 μπορεί να γραφεί και ως γινόμενο των αριθμών 1 και 15, αλλά το 15 δεν μπορεί να προκύψει μόνο από τους αριθμούς 2, 3 και 4).

Επομένως, το 15 πρέπει να γραφεί ως άθροισμα δύο προσθετέων, εκ των οποίων, τουλάχιστον ο ένας οφείλει να είναι γινόμενο. Είναι: $1 + 14 = 15$.

Με τη βοήθεια και της προηγούμενης ισότητας βρίσκουμε:

- **$1 + 2 \cdot (3 + 4) = 1 + 2 \cdot 7 = 1 + 14 = 15$**
- **$1 + (2 + 3 \cdot 4) = 1 + (2 + 12) = 1 + 14 = 15$**

Επιπλέον είναι: $3 + 12 = 15$, το οποίο μπορούμε εύκολα να σχηματίσουμε ως εξής:

- **$(1 + 2) + 3 \cdot 4 = 3 + 12 = 15$**

(και πάλι η παρένθεση μπορεί να παραληφθεί, χωρίς να αλλάζει κάτι στο αποτέλεσμα).

Σκεπτόμενοι ανάλογα, εύκολα διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει άλλη λύση.

➪ $1\ 2\ 3\ 4 = 36$

Επειδή το 36 είναι αρκετά μεγάλο για να προκύψει ως άθροισμα, θα αναζητήσουμε τη λύση στις αναλύσεις του 36 σε γινόμενο παραγόντων. Είναι: $1 \cdot 36 = 36$, που απορρίπτεται, αφού από τους αριθμούς 2, 3, 4 δε μπορεί να προκύψει το 36.

Είναι: $2 \cdot 18 = 36$, που απορρίπτεται αφού αν $1 \cdot 2 = 2$, το 18 δε μπορεί να προκύψει από τους αριθμούς 3 και 4.

Είναι: $3 \cdot 12 = 36$.

- Εύκολα βρίσκουμε ότι: $\mathbf{(1 + 2) \cdot (3 \cdot 4) = 3 \cdot 12 = 36}$

  Η δεύτερη παρένθεση μπορεί να παραληφθεί χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα. Απλά υποδεικνύει τον προσεταιρισμό των παραγόντων του γινομένου.

- Η παράλειψη της δεύτερης παρένθεσης θα μας οδηγούσε στο γινόμενο:

  $\mathbf{(1 + 2) \cdot 3 \cdot 4 = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 9 \cdot 4 = 36}$

αν εκτελούσαμε τους πολλαπλασιασμούς από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Τέλος, το γινόμενο $6 \cdot 6 = 36$ δε μπορεί να σχηματιστεί από τους αριθμούς που έχουμε.

Δραστηριότητα 2η

Συμπληρώστε τα μαγικά τετράγωνα.

20		18
	17	
		14

26		
27	25	23

1	3	9
		18

18	36	72
		24

Ένα τετράγωνο είναι μαγικό όταν το άθροισμα των αριθμών κάθε γραμμής, στήλης και διαγωνίου είναι το ίδιο.

Σε κάθε μαγικό τετράγωνο, θα υπολογίσουμε αρχικά το «μαγικό» κοινό άθροισμα από τη συμπληρωμένη γραμμή, στήλη ή διαγώνιο.

Στη συνέχεια, θα εντοπίζουμε, κάθε φορά, μια γραμμή, στήλη ή διαγώνιο που να της λείπει μόνο ο ένας από τους τρεις αριθμούς και θα τον υπολογίζουμε αφαιρώντας από το «μαγικό» άθροισμα, το άθροισμα των δύο άλλων. Θα τον συμπληρώνουμε στο μαγικό τετράγωνο και θα συνεχίζουμε τη διαδικασία μέχρι να συμπληρωθούν όλοι οι αριθμοί που λείπουν.

Λύση

➪ **1^{ος} πίνακας**

ΣΤΗΛΕΣ

Διάγωνιος Διάγωνιος

1	2	3	ΓΡΑΜΜΕΣ
20		**18**	1
	17		2
		14	3

Από τη συμπληρωμένη διαγώνιο υπολογίζουμε το κοινό άθροισμα οριζοντίως, καθέτως και διαγωνίως. Είναι: 20 + 17 + 14 = **51** («μαγικό» άθροισμα).

Μπορούμε τώρα να συμπληρώσουμε το τετράγωνο της **3^{ης} στήλης**. Είναι: 18+14 =32 51-32 =19

Οπότε στην τρίτη στήλη θα βάλουμε το 19.

Εφόσον βρήκαμε το 19 προσθέτουμε το 17 και το 19 της **2^{ης} γραμμής**:

17 + 19 =36

Αφαιρούμε από το 51 και έχουμε το άγνωστο τετραγωνάκι: 51 - 36 =**15**

Προσθέτουμε τους αριθμούς στην **1η στήλη**: 20 + 15 =35

Αφαιρούμε από το 51 το 35: 51 -35 = **16**

Προσθέτουμε τους αριθμούς στην **3η γραμμή** 16 +14 =30

Αφαιρούμε από το 51 το 30 και έχουμε 51 - 30 =**21**

Προσθέτουμε τους αριθμούς στην **1η γραμμή** και έχουμε 20 +18 =38

Αφαιρούμε από το 51 το 38 51 -38 =**13**

Συμπληρώνουμε το τετράγωνο

20	**13**	18
15	17	**19**
16	**21**	14

➪ **2^{ος} πίνακας**

ΣΤΗΛΕΣ

1	2	3		
26			1	ΓΡΑΜΜΕΣ
27	**25**	**23**	2	
			3	

Προσθέτουμε τους αριθμούς στη **2^{η} γραμμή** για να βρούμε το «μαγικό» άθροισμα

27 +25 + 23 =**75**

Προσθέτουμε τους αριθμούς στην **1η στήλη** 26 +27 =53

Αφαιρούμε από το 75 το 53 75-53=**22**

Προσθέτουμε τους αριθμούς **στη διαγώνιο** που ξεκινάει από τη 1η στήλη και έχουμε: 26 + 25 =51

Αφαιρούμε από το 75 το 51 = **24**

Προσθέτουμε τους αριθμούς στην **3η γραμμή** 22 +24 =46

Αφαιρούμε από το 75 το 46 75 -46 =**29**

Προσθέτουμε τους αριθμούς στη **2η στήλη** και έχουμε: 25 +29 =54

Αφαιρούμε από το 75 το 54 και έχουμε 75 -54 =**21**

Προσθέτουμε τους αριθμούς στην **3η στήλη** και έχουμε 23 +24 =47

Αφαιρούμε από το 75 το 47 και έχουμε: 75 -47 =**28**

Συμπληρώνουμε τον πίνακα

26	**21**	**28**
27	25	23
22	**29**	**24**

➪ **3ος πίνακας**

ΣΤΗΛΕΣ

1	2	3	ΓΡΑΜΜΕΣ
1	**3**	**9**	1
		18	2
			3

Προσθέτουμε τους αριθμούς στη 1η γραμμή 1 +3 +9 =13. Το τετράγωνο δεν είναι μαγικό επειδή στη 2η γραμμή υπάρχει ο αριθμός 18 ο οποίος υπερβαίνει το 13.

Στο τετράγωνο αυτό μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για τους αριθμούς της 1ης γραμμής ισχύει:

3 = 3 · 1 και 9 = 3 · 3

δηλαδή ότι καθένας από τους δύο «τελευταίους» αριθμούς της γραμμής αυτής είναι τριπλάσιος του προηγούμενού του.

Επιπλέον είναι: 18 = 2 · 9,

δηλαδή ο αριθμός που βρίσκεται ακριβώς κάτω από το 9 είναι διπλάσιός του.

Με αυτή τη λογική, θα μπορούσαμε να συμπληρώσουμε το μαγικό τετράγωνο ως εξής:

1	3	9
2	**6**	18
4	**12**	**36**

δηλαδή, να συμπληρώσουμε τη $2^{η}$ γραμμή με τα 2πλάσια των αριθμών της $1^{ης}$ γραμμής και την $3^{η}$ γραμμή με τα 2πλάσια των αριθμών της $2^{ης}$ γραμμής.

Βέβαια, κατ' αυτόν τον τρόπο το τετράγωνο που προκύπτει σε καμία περίπτωση δεν είναι μαγικό. Έχει όμως την ιδιότητα ότι σε κάθε γραμμή του, καθένας από τους δύο τελευταίους «αριθμούς» είναι τριπλάσιος του προηγούμενού του και σε κάθε στήλη, καθένας από τους δύο τελευταίους αριθμούς είναι διπλάσιος του προηγούμενού του.

⇨ **$4^{ος}$ πίνακας**

ΣΤΗΛΕΣ

1	2	3	ΓΡΑΜΜΕΣ
18	**36**	**72**	1
		24	2
			3

Προσθέτουμε τους αριθμούς στη **1η γραμμή** έχουμε: 18+36 +72 =**126** (μαγικό άθροισμα)

Προσθέτουμε τους αριθμούς στην **3η στήλη** έχουμε: 72+24 =96

Αφαιρούμε από το 126 το 96 και έχουμε: 126 -96 =**30**

Προσθέτουμε τους αριθμούς στη **διαγώνιο** από την $1^{η}$ στήλη έχουμε: 18 +30 =48

Αφαιρούμε από το 126 το 48 και έχουμε 126 -48 =**78**

Προσθέτουμε τους αριθμούς στη **2η γραμμή** έχουμε: 78 +24 =102

Αφαιρούμε από το 126 το 102 και έχουμε: 126 - 102 = **24**

Προσθέτουμε τους αριθμούς στην **1η στήλη** έχουμε 18 +24 =42

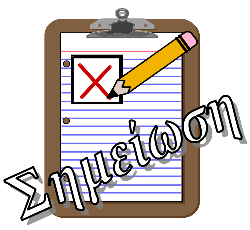
Αφαιρούμε από το 126 το 42 και έχουμε 126-42=**84**

Προσθέτουμε τους αριθμούς στη **2^{η} στήλη** έχουμε 36 + 78 =114

Αφαιρούμε από το 126 το 114 και έχουμε 126 - 114 =**12**

Συμπληρώνουμε το τετράγωνο

18	36	72
24	**78**	24
84	**12**	**30**



Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για τους αριθμούς της 1^{ης} γραμμής ισχύει:

36 = 2 · 18 και 72 = 2 · 36

δηλαδή ότι καθένας από τους δύο «τελευταίους» αριθμούς της γραμμής αυτής είναι διπλάσιος του προηγούμενού του.

Επιπλέον είναι: 24 = 72: 3,

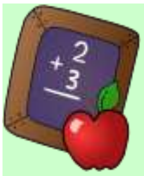
δηλαδή ο αριθμός που βρίσκεται ακριβώς κάτω από το 72 προκύπτει από τη διαίρεση του 72 με το 3.

Και πάλι με αντίστοιχη λογική θα μπορούσαμε να συμπληρώσουμε το μαγικό τετράγωνο ως εξής:

18	36	72
6	**12**	24
2	**4**	**8**

δηλαδή, να συμπληρώσουμε τη 2^{η} γραμμή με τα πηλίκα που προκύπτουν από τη διαίρεση των αριθμών της 1^{ης} γραμμής με το 3 και την 3^{η} γραμμή με τα πηλίκα που προκύπτουν από τη διαίρεση των αριθμών της 2^{ης} γραμμής με το 3.

Και πάλι, κατ' αυτόν τον τρόπο το τετράγωνο που προκύπτει σε καμία περίπτωση δεν είναι μαγικό. Έχει όμως την ιδιότητα ότι σε κάθε γραμμή του, καθένας από τους δύο τελευταίους «αριθμούς» είναι διπλάσιος του προηγούμενού του και σε κάθε στήλη, καθένας από τους δύο τελευταίους αριθμούς προκύπτει από τη διαίρεση του προηγούμενού με το 3.



Λυμένες ασκήσεις εκτός βιβλίου

1. Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις:

α) $(4 - 2)^3$ **β) $(4 + 2)^3$** **γ) $(4 \cdot 2)^3$**

Πρώτα θα γίνουν οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις και έπειτα θα υπολογίσουμε τις δυνάμεις, (θα αναλύσουμε τις δυνάμεις σύμφωνα με τον ορισμό και θα εκτελέσουμε τους πολλαπλασιασμούς από αριστερά προς τα δεξιά).

Λύση

α) $(4 - 2)^3 = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$

Εκτελούμε την πράξη στην παρένθεση, αναλύουμε τη δύναμη σε γινόμενο βάση του ορισμού και το υπολογίζουμε εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς από τα αριστερά προς τα δεξιά.

β) $(4 + 2)^3 = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \cdot 6 = 216$

Εκτελούμε την πράξη στην παρένθεση, αναλύουμε τη δύναμη σε γινόμενο βάση του ορισμού και το υπολογίζουμε εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς από τα αριστερά προς τα δεξιά.

γ) $(4 \cdot 2)^3 = 8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 64 \cdot 8 = 512$

Εκτελούμε την πράξη στην παρένθεση, αναλύουμε τη δύναμη σε γινόμενο βάση του ορισμού και το υπολογίζουμε εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς από τα αριστερά προς τα δεξιά.

2. **Να βρείτε τους αριθμούς στους οποίους αντιστοιχούν τα ακόλουθα αναπτύγματα:**

i) $3 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^3 + 7$

ii) $8 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10$

iii) $6 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^2 + 2$

Τα αντιμετωπίζουμε όπως οποιαδήποτε αριθμητική παράσταση. Δηλαδή, υπολογίζουμε πρώτα τις δυνάμεις, κατόπιν εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και στο τέλος τις προσθέσεις.

Λύση

i) $3 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^3 + 7$

$= 3 \cdot 100000 + 1 \cdot 1000 + 7$ → *Υπολογίζουμε τις δυνάμεις. Είναι* $10^{\nu} = 1\underbrace{0.....0}_{\nu \text{ μηδενικά}}$. *Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς*

$= \underline{300000 + 1000} + 7$ → *Εκτελούμε τις προσθέσεις*

$= 301000 + 7$ → *Εκτελούμε την πρόσθεση*

$= 301007$ → *Αποτέλεσμα*

ii) $8 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10$

$= 8 \cdot 10000 + 8 \cdot 10$ → *Υπολογίζουμε τη δύναμη. Είναι* $10^{\nu} = \underbrace{10......0}_{\nu \text{ μηδενικά}}$.

Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς

$= 80000 + 80$ → *Εκτελούμε την πρόσθεση*

$= 80080$ → *Αποτέλεσμα*

iii) $6 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^2 + 2$

$= 6 \cdot 1000000 + 9 \cdot 100000 + 4 \cdot 100 + 2$ → *Υπολογίζουμε τις δυνάμεις. Είναι* $10^{\nu} = 1\underbrace{0.....0}_{\nu \text{ μηδενικά}}$.

Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς

$= 6000000 + 900000 + 400 + 2$ → *Εκτελούμε τις προσθέσεις*

$= 6900402$ → *Αποτέλεσμα*

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
i) $3 \cdot [8:(3+1)]^3 - 2 \cdot 5$ ii) $[(6+3)^2 + 9] : (3 \cdot 5)$

Κάνουμε τις πράξεις με την ακόλουθη προτεραιότητα:

i) υπολογίζουμε τις δυνάμεις

ii) εκτελούμε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις

iii) εκτελούμε προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, **εκτελούμε πρώτα τις πράξεις στις παρενθέσεις (από τις εσωτερικές στις εξωτερικές)** με την ίδια σειρά.

Λύση

i) $3 \cdot [8:(3+1)]^3 - 2 \cdot 5$ → Εκτελούμε την πρόσθεση στην εσωτερική παρένθεση. Η αγκύλη γίνεται παρένθεση.

$= 3 \cdot (8:4)^3 - 2 \cdot 5$ → *Εκτελούμε τη διαίρεση στην παρένθεση.*

$= 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 5$ → *Υπολογίζουμε τη δύναμη ($2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$)*

$= 3 \cdot 8 - 2 \cdot 5$ → *Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς*

$= 24 - 10$ → *Εκτελούμε την αφαίρεση*

$= 14$ → *Αποτέλεσμα*

ii) $[(6+3)^2 + 9] : (3 \cdot 5)$ → Εκτελούμε την πρόσθεση στην εσωτερική παρένθεση. Η αγκύλη γίνεται παρένθεση

$= (9^2 + 9) : (3 \cdot 5)$ → *Εκτελούμε τη δύναμη στην παρένθεση*

$= (81 + 9) : (3 \cdot 5)$ → *Εκτελούμε τις πράξεις στις παρενθέσεις*

$= 90 : 15$ → *Εκτελούμε τη διαίρεση*

$= 6$ → *Αποτέλεσμα*

Σημείωση: Η παρένθεση (3 · 5) μπορούσε να υπολογιστεί από την αρχή

1. Να κάνετε τις πράξεις

α) $12^2 + 9^2$ β) $111^2 - 11^2$ γ) $6{,}965^2 - (6{,}965 \cdot 6{,}965)$

2. Να αναλύσετε τις δυνάμεις σε γινόμενα:

i) 5^3 ii) 3^2 iii) 2^5

3. Να γράψετε με τη μορφή δυνάμεων τα γινόμενα:

α) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ β) $5 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x$ γ) $x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$

4. Να γράψετε σε αναπτυγμένη μορφή, με τη βοήθεια δυνάμεων του 10, τους αριθμούς:

α) 2427   β) 10507   γ) 425732   δ) 2049804

5. Να βρείτε τους αριθμούς στους οποίους αντιστοιχούν τα ακόλουθα αναπτύγματα:

i) $5 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$

ii) $5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^1 + 9$

iii) $8 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 1$

6. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(198 - 193)^4$ β) $(9{,}81 - 5{,}81)^5$ γ) $(25{,}32 - 25{,}22)^3$

7. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$A = 15 : 5 - 2^3 : 4 + 5 \cdot (12 + 3^2) - 6 \cdot (4 - 1)^2$$

Απαντήσεις στις άλυτες ασκήσεις

1. α) 225

β) 12.200

γ) 0

2. i) $5 \cdot 5 \cdot 5$ ii) $3 \cdot 3$ iii) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

3. α) $3^4 \cdot 4^3$ β) $5^2 \cdot x^3$ γ) xy^4

4. α) $2427 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$

β) $10.507 = 10^4 + 5 \cdot 10^2 + 7$

γ) $425.732 = 4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2$

δ) $2049804 = 2 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4$

5. i) 5634127 ii) 50039 iii) 804601

6.

α) 625

β) 1024

γ) 0,001

7.

Α = 52

Με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε εύκολα ότι:

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, το τετράγωνο (δεύτερη δύναμη) ενός αριθμού που όλα τα ψηφία του είναι ίσα με το 1 σχηματίζεται γράφοντας στη σειρά όλους τους αριθμούς από το 1 έως τον αριθμό που εκφράζει το πλήθος των ψηφίων του αριθμού που υψώνεται στο τετράγωνο και στη συνέχεια κατ' αντίστροφο τρόπο μέχρι το 1.

Έτσι, ο αριθμός αυτός «διαβάζεται» το ίδιο τόσο από τα αριστερά προς τα δεξιά, όσο και από τα δεξιά προς τα αριστερά.

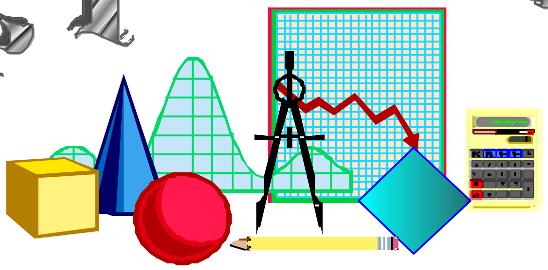
Μετά τις παραπάνω παρατηρήσεις, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις ζητούμενες δυνάμεις.

$11111^2 = 123454321$

$111111^2 = 12345654321$

$1111111^2 = 1234567654321$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

«Φυσικοί αριθμοί»

1.3 Δυνάμεις φυσικών αριθμών	**σελ. 1**
Για διασκέδαση	10
Ερωτήσεις εμπέδωσης	13
Δραστηριότητες του βιβλίου	19
Μεθοδολογία των ασκήσεων	26
Εφαρμογές – παραδείγματα του βιβλίου	28
Ασκήσεις του βιβλίου	32
Δραστηριότητες για το σπίτι	56
Λυμένες ασκήσεις εκτός βιβλίου	65
Άλυτες ασκήσεις εκτός βιβλίου	68

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό περιλαμβάνει **<u>το 4ο τμήμα της παραγράφου 1.3</u>**

- Δραστηριότητες για το σπίτι σελ. 1-9
- Λυμένες ασκήσεις εκτός βιβλίου σελ. 10-12
- Άλυτες ασκήσεις εκτός βιβλίου σελ. 13
- Απαντήσεις στις άλυτες ασκήσεις σελ. 14-15