Φροντιστήριο Μ.Ε. «ΑΙΧΜΗ»

Ασκήσεις Επανάληψης Γ΄ Λυκείου

Ασκήσεις Επανάληψης σε όλο το εύρος της διδακτέας ύλης

4

Κων/νος Παπασταματίου
Κ. Καρτάλη 28 (με Δημητριάδος)
Τηλ. 2421 302 598

Θέματα Δεσμών 1983-2001

'Ασκηση 1. Η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο κλειστό $\left[\alpha,\beta\right]$ έχει παράγωγο στο διάστημα $\left(a,\beta\right)$ και $f\left(a\right)=f\left(\beta\right)=0$. Να αποδειχθεί:

α) ότι για τη συνάρτηση $F\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{x-c}$ όπου $c\notin\left[\alpha,\beta\right]$ υπάρχει $c_0\in\left(a,\beta\right)$ τέτοιο ώστε $F'\left(c_0\right)=0$

β) Αν $c\notin\left[\alpha,\beta\right]$, ότι υπάρχει $c_0\in\left(a,\beta\right)$ τέτοιο ώστε στο σημείο $\left(c_0,f\left(c_0\right)\right)$ της γραμμής με εξίσωση $y=f\left(x\right)$ διέρχεται από το σημείο $\left(c,0\right)$

1η Δέσμη 1983, Ζήτημα 2

'Ασκηση 2. **Α)** Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x>0$ ισχύει η σχέση $\log x\le\left|x-1\right|$

Β) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$ με $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x\log x}{1-x} & ,0<x\ne1\\ 0 & ,x=0\\ -1 & ,x=1\end{cases}$. Να αποδειχθεί ότι

i) η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

ii) είναι φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,1\right)$

iii) $f'\left(1\right)=-\dfrac{1}{2}$

1η Δέσμη 1983, Ζήτημα 3

'Ασκηση 3. **α)** Έστω ότι μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα Δ και ότι στο σημείο $x_0\in\Delta$ είναι $f'\left(x_0\right)=0$. Αν $f''\left(x_0\right)>0$, τότε το $f\left(x_0\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

β) Δίνεται η συνάρτηση f με $f\left(x\right)=x^2\left(x-3\right)+4$, $x\in\mathbb{R}$. Έστω x_1,x_2 είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x_3 το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία του επιπέδου $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$, $\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)$,$\left(x_3,f\left(x_3\right)\right)$ είναι συνευθειακά.

1η Δέσμη 1985, Ζήτημα 4

'Ασκηση 4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f\left(x\right)=x+1+\dfrac{1}{x+1}$

i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1,x=5$

1η Δέσμη 1988, Ζήτημα 3

'Ασκηση 5. Έστω f,g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

- Είναι παραγωγίσιμες στο Δ
- $f''\left(x\right)=g''\left(x\right)$
- $0\in\Delta$ και $f\left(0\right)=g\left(0\right)$

Να δειχθεί ότι:

α) Για κάθε $x \in \Delta$ $f(x)-g(x)=cx$, όπου $c \in \mathbb{R}$

β) Αν η $f(x)=0$ έχει ρίζες ετερόσημες ρ_1, ρ_2 τότε η $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο κλειστό $[\rho_1, \rho_2]$

1η Δέσμη 1989, Ζήτημα 3

'Ασκηση 6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3x+\dfrac{1}{2x^2}$

Α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

Β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f της ευθείας με εξίσωση $y=3x$ και των ευθειών με εξισώσεις $x=1$ και $x=a$, $a>1$

Γ) Να υπολογίσετε το όριο $E(a)$ του ανωτέρου χωρίου όταν το α τείνει στο άπειρο.

1η Δέσμη 1990, Ζήτημα 4

'Ασκηση 7. Α. α) Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0,+\infty)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln f(x)$, $x \in \Delta$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $f(x)\cdot f''(x) \geq [f'(x)]^2$, για κάθε $x \in \Delta$

β) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x)=\ln(x^2+2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

Β. α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με $f(x)=a^x-x$, $x \in \mathbb{R}$ και $0<a<1$.

β) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η ισότητα

$a^{\lambda^2-4}-a^{\lambda-2}=(\lambda^2-4)-(\lambda-2)$

1η Δέσμη 1992, Ζήτημα 3

'Ασκηση 8. Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+4)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$

Β. α) Να αποδειχθεί ότι μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $f(x)=ce^x$, όπου c πραγματική σταθερά.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$g'(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x+g(x)\cdot \eta\mu x=g(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x$ και $g(0)=1992$

1η Δέσμη 1992, Ζήτημα 4

'Ασκηση 9. Α. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει η σχέση $1+x<e^x<1+e\cdot x$

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^3\eta\mu\dfrac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$

i) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

ii) Να βρεθεί η παράγωγος της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$

4η Δέσμη 1992, Ζήτημα 2

'Ασκηση 10. Α. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)-2x(\ln x-1), x>0$

α) Να βρεθεί η παράγωγος f' της f για κάθε $x>0$

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $E(t)=\int_1^t (x-2)\cdot \ln x dx$ για κάθε $t>1$

β) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{E'(t)}{t\ln t}$

4η Δέσμη 1992, Ζήτημα 3

'Ασκηση 11. Α. Να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x)=ax^3+\beta x+\gamma \quad x\in\mathbb{R}$, $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- Η συνάρτηση f είναι περιττή
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=1$
- $\int_0^2 f(x)dx=2$

4η Δέσμη 1992, Ζήτημα 4

'Ασκηση 12. Α. Δίνεται πραγματική συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x)>0$ και $g''(x)\cdot g(x)-[g'(x)]^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα και

ii) $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$

Β. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε να ισχύει

$g(x+y)=e^y g(x)+e^x g(y)+xy+a$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $g(0)=-a$

ii) $g'(x)=g(x)+g'(0)e^x+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

1η Δέσμη 1997, Ζήτημα 3

'Ασκηση 13. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία σε σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 0 και ικανοποιεί τη σχέση $f''(x)>4\left(f'(x)-f(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

1η Δέσμη 1999, Ζήτημα 1

'Ασκηση 14. α) Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1)>x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{5}$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει

$\left[f(x)\right]^5+2\left[f(x)\right]^3+3f(x)=(x+1)\ln(x+1)-\frac{4}{5}x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+182$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

4η Δέσμη 1999, Ζήτημα 1

'Ασκηση 15. Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu^2(ax)$, $x\in\mathbb{R}$ και $a\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του α ώστε να ισχύει $f''(x)+4a^2f(x)=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,3]$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$

4η Δέσμη 1999, Ζήτημα 3

'Ασκηση 16. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις συνεχείς στο $\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε να ισχύει $f(x)-g(x)=x-4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y=3x-7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

α) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{xf(x)-3x^2+1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g, καθώς το $x\to+\infty$

1η Δέσμη 2000, Ζήτημα 4

'Ασκηση 17. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:
$2xf(x)+(x^2+1)f'(x)=e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με $f(0)=1$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση f.

4η Δέσμη 2000, Ζήτημα 1

'Ασκηση 18. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε $\int_0^3 f(2x+1)dx=\frac{1}{2}\int_1^7 f(x)dx$

β) Έστω ότι $\int_0^3 f(2x+1)dx=\int_1^7 f(x)dx+2004$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,7)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=334$

4η Δέσμη 2000, Ζήτημα 3

'Ασκηση 19. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2\ln x, x>0$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = x_0$, όπου x_0 είναι η θέση του τοπικού ακροτάτου της f.

1η Δέσμη 2001, Ζήτημα 3

'Ασκηση 20. Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (a,β) και $f(a)=2\beta$, $f(\beta)=2a$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a,β)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(a,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=4$

1η Δέσμη 2001, Ζήτημα 3

'Ασκηση 21. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0)=1$ και τέτοια ώστε να ισχύει: $F(x)\geq x\cdot e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. όπου F μία παράγουσα της f με $F(0)=0$.

Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$

1η Δέσμη 2001, Ζήτημα 4

'Ασκηση 22. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί την ισότητα $\int_a^\beta f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=0$ όπου $a,\beta\in\mathbb{R}$ με $a<\beta$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(a)=f(\beta)$

β) Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a,β)

1η Δέσμη 2001, Ζήτημα 4

'Ασκηση 23. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x+\dfrac{4}{x}$, $x>0$

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=\lambda+1$, όπου $\lambda>0$ είναι $E(\lambda)=2\lambda+1+4\ln\left(1+\dfrac{1}{\lambda}\right)$

β) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο.

1η Δέσμη 2001, Ζήτημα 4