Φροντιστήριο Μ.Ε. «ΑΙΧΜΗ»

Ασκήσεις Επανάληψης Γ΄ Λυκείου

Ασκήσεις Επανάληψης σε όλο το εύρος της διδακτέας ύλης

3

Κων/νος Παπασταματίου
Κ. Καρτάλη 28 (με Δημητριάδος)
Τηλ. 2421 302 598

Θέματα ΟΕΦΕ 2002 - 2015

'Ασκηση 1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και

$$f'(x)=\frac{2}{1+e^{f(x)}} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ , με } f'(0)=1$$

α) Να αποδείξετε ότι η f

i) είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της

ii) έχει μοναδική ρίζα την $x=0$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)+e^{f(x)}=2x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) i) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

δ) Να γίνει ο πίνακας μεταβολών της f και πρόχειρη γραφική της παράσταση.

(ΟΕΦΕ 2002)

'Ασκηση 2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(ax)}{\sqrt{x}}, a>0$

Α. Αν η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $x-y=0$, να βρείτε την τιμή του α.

Β. Για $a=1$

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της f.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες

γ) Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{\kappa}\right)^{\sqrt{\kappa+1}}>\left(\sqrt{\kappa+1}\right)^{\sqrt{\kappa}}$ για κάθε θετικό ακέραιο $\kappa\geq 8$

(ΟΕΦΕ 2003)

'Ασκηση 3. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)-g'(x)=1 \text{ , } f'(x)\neq 1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Αν το όριο $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+2}{f(x)-x-2}$ εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου του πηλίκου, παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής $\dfrac{0}{0}$

α) i) Να υπολογίσετε το όριο L

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο $+\infty$

β) Να αποδείξετε ότι η g έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι: $f(x)-g(x)=x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(ΟΕΦΕ 2004)

'Ασκηση 4. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με $g(0)=1$ και

$$f'(x)=g^2(x)\neq 0 \text{ , } f^2(x)+g^2(x)=1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $g'(x)=-g(x)\cdot f(x)$, $x\in\mathbb{R}$

ii) Η g είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0]$, $[0,+\infty)$ και έχει ακρότατο το 1.

β) i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

ii) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0,0)$

γ) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου, που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=x$, $x=1$, να δείξετε ότι: $E=\frac{1}{2}+\ln\left[g(1)\right]$ τ.μ.

(ΟΕΦΕ 2004)

'Ασκηση 5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2\sqrt{x}\cdot(\ln x-2)$, $x>0$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x>0$

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$

γ) Να μελετήσετε τα κοίλα της f και να βρείτε το σημείο καμπής της

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\frac{1}{e}$ και $x=e^2$

(ΟΕΦΕ 2005)

'Ασκηση 6. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0)=\frac{1}{2}$ και

$e^x\left[f(x)+f'(x)\right]+\eta\mu x=-f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $f(x)+f(-x)=\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx$

δ) Να αποδείξετε ότι $0\le\int_0^{\pi/2} f(x)dx\le\frac{\pi}{4}$

(ΟΕΦΕ 2005)

'Ασκηση 7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-ax-1$ όπου $a>1$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το οποίο είναι αρνητικό.

γ) Έστω $E(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο $(0, f(0))$ και την ευθεία $x=a, a>1$

i) Να αποδείξετε ότι $E(a)=e^a-\frac{a^2}{2}-a-1$ τ.μ.

ii) Να βρείτε το $\lim\limits_{a\to+\infty} E(a)$

'Ασκηση 8. Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x^2+a)\cdot e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y=-2x+2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(0, f(0))$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι α = 2.
β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
γ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2007$ έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}$.

(ΟΕΦΕ 2007)

'Ασκηση 9. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ και G μία παράγουσα της g στο $\mathbb{R}$ με $G(0)=0$.

α) Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα την συνάρτηση G
β) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{x}{x^2+1}\le G(x)\le x$ για κάθε $x\ge 0$
γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^a g(x)dx+\int_0^{-a} g(x)dx=0$ για κάθε $a\in\mathbb{R}$
δ) Το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από γραφική παράσταση της G, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$ είναι $E=G(1)-\dfrac{1}{2}\ln 2$ τ.μ.

(ΟΕΦΕ 2007)

'Ασκηση 10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\lambda, & \text{αν } x>0\\ (\mu-1)x+1, & \text{αν } x\le 0\end{cases}$ $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η f να είναι συνεχής.
β) Να βρείτε την τιμή του μ, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$
γ) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1 – 1
δ) Για λ = 1 και μ = 2 , να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{\pi} f(x)dx$

(ΟΕΦΕ 2008)

'Ασκηση 11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{1-e^x}, x\in\mathbb{R}$

α) i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
ii) Να αποδείξετε ότι $f''(x)=(e^x-1)e^{1+x-e^x}$, να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.
β) Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.
γ) Να παραστήσετε γραφικά την f
δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της $f'(x)$, του άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=\ln\dfrac{1}{2}$

(ΟΕΦΕ 2008)

'Ασκηση 12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+2+2\ln x$

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f.
γ) Αν $g(x)=\frac{x\cdot \ln x}{x+2}$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0>0$ ώστε $g(x)\geq g(x_0)$ για κάθε $x>0$
δ) Να δείξετε ότι για κάθε $x>2$ ισχύει: $f(x-2)<2f(x+1)-f(x+4)$

(ΟΕΦΕ 2009)

'Ασκηση 13. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x+1}{e^x} \text{ και } f(1)=\frac{1}{e}$$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{-1/x}$
β) i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x=1$
ii) Να δείξετε ότι $\int_1^2 f(x)dx>\frac{2}{e}$
γ) Αν $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, να βρείτε το εμβαδόν $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της g τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=t$ με $t>1$
δ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} E(t)$

(ΟΕΦΕ 2009)

'Ασκηση 14. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x>0$ ισχύουν $x\cdot f'(x)=\frac{x+1}{e^{f(x)}+1}$ και $f(1)=0$
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^x+x$ είναι 1 – 1
β) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x$ για κάθε $x>0$
γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)-1}{x}$ ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x}=\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$ αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
ε) Να εξετασθεί η h ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι για κάθε x_1,x_2 με $x_2>x_1>0$ ισχύει $\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}\geq-\frac{1}{2e^5}$

(ΟΕΦΕ 2010)

'Ασκηση 15. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=4x^3+12\lambda x^2+(\lambda-1)x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει στο σημείο $x_0=-1$ καμπή.
α) i) Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$
ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

γ) i) Να βρείτε την αρχική της f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

(ΟΕΦΕ 2011)

'Ασκηση 16. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\eta\mu x)+f(\sigma\upsilon\nu x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ και $f(0)+f(1)=1$

ii) Υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)+x_0=1$

β) Έστω επιπλέων, ότι η f είναι παραγωγίσιμη και $f(x)\geq\sqrt{2}x-\dfrac{1}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να βρείτε την $f'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}$

(ΟΕΦΕ 2011)

'Ασκηση 17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{x-2}$ και $g(x)=\ln x+2$

α) Να βρείτε τις συνθέσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ και να εξετάσετε αν είναι ίσες.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφή και να βρείτε την f^{-1}

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-2}=\ln x+2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(e^{-2},2)$

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{(g\circ f)(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{(f\circ g)(x)}=0$

(ΟΕΦΕ 2012)

'Ασκηση 18. ‘Δίνονται οι συναρτήσεις f, G και F, οι οποίες είναι ορισμένες στο διάστημα $[0,+\infty)$ με f παραγωγίσιμη και G δύο φορές παραγωγίσιμη στο ίδιο διάστημα.

Έστω ότι ισχύουν $f(0)=1$, $G(0)=0$ και για κάθε $x\geq 0$

είναι $f'(x)>0$, $G'(x)>1$ και F παράγουσα της f με $F(0)=0$

α) Να αποδείξετε ότι $F(x)\geq 0$ και $G(x)\geq x$ για κάθε $x\geq 0$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left[F(x)\cdot\ln x\right]$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)\cdot\ln\xi+\dfrac{F(\xi)}{\xi}=0$

γ) Δίνεται επιπλέον, ότι $f'(x)F(x)+f^2(x)=G''(x)\left[G(x)-x\right]+\left[G'(x)-1\right]^2$ για κάθε $x\geq 0$.
Να αποδείξετε ότι:

i) $F(x)=G(x)-x$, για κάθε $x\geq 0$

ii) Για κάθε $x_0>0$, οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των F , G στα σημεία τους $B\left(x_0,F(x_0)\right)$ και $\Gamma\left(x_0,G(x_0)\right)$ αντιστοίχως τέμνονται σε σημείο Α του άξονα $y'y$ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισεμβαδικό με το χωρίο, που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των F , G και την ευθεία $x=x_0$

(ΟΕΦΕ 2013)

'Ασκηση 19. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=1$, $g(1)=0$ και ικανοποιούν τις σχέσεις $f'(x)-f(x)=e^x g'(x)-1$ και $2f(x)+x^2-2x\geq 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x g(x)+1$

β) i) Να υπολογίσετε το $g'(1)$

ii) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)g\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)\right]=0$

γ) Αν, επιπλέον ισχύει $g(x)=(x-1)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ii) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, από το σημείο $M(1,\lambda)$ άγονται το πολύ τρείς εφαπτόμενε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με $h(x)=e^x(1-x)+1$

(ΟΕΦΕ 2014)

'Ασκηση 20. ‘Δίνονται οι συναρτήσεις $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $G:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>-1$
- $f(0)=2$
- $f'(x)-f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\ln(x+1)-3$, για κάθε $x>-1$
- $G(x)=\dfrac{2-f(x)+\ln(x+1)}{x\cdot e^x+1}$, για κάθε $x>-1$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=3-e^x+\ln(x+1)$ για κάθε $x>-1$

β) i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x-\ln(x+1)=3$ έχει δύο ακριβώς λύσεις ρ_1,ρ_2 στο διάστημα $(-1,+\infty)$

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $3+\ln(x+1)=e^x+ax^3$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$

iii) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(\ln x+1)+e^{x-1}>\ln x+x$ για κάθε $x>1$

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $x_0>-1$ τέτοιος ώστε η συνάρτηση G να παρουσιάζει στη θέση x_0 τοπικό μέγιστο και ισχύει η σχέση $e^{x_0}=x_0+2$

(ΟΕΦΕ 2015)