Φροντιστήριο Μ.Ε. «ΑΙΧΜΗ»

Ασκήσεις Επανάληψης Γ΄ Λυκείου

Ασκήσεις Επανάληψης σε όλο το εύρος της διδακτέας ύλης

2

Κων/νος Παπασταματίου
Κ. Καρτάλη 28 (με Δημητριάδος)
Τηλ. 2421 302 598

Περιεχόμενα

Συνδυαστικά Θέματα

Άσκηση 1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{2x}{e^x}$ και $g(x)=e^x-\frac{x^3}{3}-x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι $e^x>2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

δ) Να βρείτε το σύνολοι τιμών της g

ε) Να λύσετε την ανίσωση $g(e^{2x})<g(4x^2+1)$

Άσκηση 2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+2+2\ln x$, $x>0$

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f.

γ) Αν $g(x)=\frac{x\cdot\ln x}{x+2}$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0>0$ ώστε: $g(x)\geq g(x_0)$, για κάθε $x>0$

δ) Να δείξετε ότι για κάθε $x>2$ ισχύει: $f(x-2)+f(x+4)<2\cdot f(x+1)$

Άσκηση 3. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$, $x>0$ και $g(x)=e^x\cdot\ln x$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι $g''(x)=e^x\cdot f(x)$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα και να βρείτε ένα διάστημα πλάτους $\frac{1}{2}$ στο οποίο να περιέχεται.

δ) Να αποδείξετε ότι η g έχει μοναδικό σημείο καμπής.

Άσκηση 4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{ax^2}{x-3} & ,x<2\\ -\frac{\beta}{x} & ,x\geq 2\end{cases}$

α) Να προσδιορίσετε τα α, β ώστε η f να είναι συνεχής και η C_f να έχει πλάγια ασύμπτωτη της ευθεία $y=x+3$ στο $-\infty$

β) Για α=1 και β=8, να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=1$, $x=3$ και τον άξονα $x'x$

Άσκηση 5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1-x}{3}\cdot e^x$, για κάθε $x\in[0,1]$.

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία, ακρότατα, κοίλα, σημεία καμπής, να γίνει ο πίνακας μεταβολών της και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β) Δείξτε ότι υπάρχει ένα μόνο $a\in(0,1)$ με την ιδιότητα: $3f(a)=(1-f(a))\cdot e^a$

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,1)$ τέτοιοι, ώστε $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=\frac{3a-1}{3(a-1)}$

Άσκηση 6. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ και $g(x)=\ln x$

α) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

β) Να δείξετε ότι $g(x)\ge f(x)$, για κάθε $x>0$

γ) Να δείξετε ότι: $\int_2^3 \dfrac{x-1}{x\cdot\ln x}dx\le 1$

δ) Αν $a>\beta>0$, να δείξετε ότι: $2a-\ln a^{a+1}<2\beta-\ln\beta^{\beta+1}$

Άσκηση 7. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x-\ln x+e^x$, $x\ge1$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(x+e^x\right)=f(\ln x+2010)$ έχει μοναδική λύση στο $[1,+\infty)$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_1^e f(x)dx+\int_a^\beta f^{-1}(x)dx$ όπου $a=1+e$ και $\beta=e-1+e^e$

Άσκηση 8. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(-e,e)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0)=2$ και $f'(x)=-2x\cdot e^{-f(x)}$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς $f'(0)$, $f''(0)$

β) Να βρείτε την f και στη συνέχεια το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $a,\beta\in\mathbb{R}$ με $a<0<\beta$ τέτοιοι ώστε: $f(a)+f(\beta)=1$

δ) Για τα α, β του προηγούμενου ερωτήματος να δείξετε ότι ισχύει $f'(a)>f'(\beta)$

Άσκηση 9. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με: $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

α) Να δείξετε ότι για κάθε $x>1$, ισχύει: $\dfrac{1}{x+1}<f(x)<1$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι για κάθε $a,\beta\in\mathbb{R}$, με $0<a<\beta$ ισχύει: $(1+a)^\beta>(1+\beta)^a$

γ) Να δείξετε ότι: $\dfrac{1}{\ln2}\le\int_1^2\dfrac{1}{f(x)}dx\le\dfrac{2}{\ln3}$

Άσκηση 10. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f'(a)=f'(\beta)=0$ και $f(a)<f(\beta)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & ,a<x\le\beta\\ 0 & ,x=a\end{cases}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο $x_0=\beta$ με $g'(\beta)<0$.

β) Να αποδείξετε ότι η g παίρνει μέγιστο σε ένα εσωτερικό σημείο του $[\alpha,\beta]$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $c\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(c)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

δ) Αν η $f'(x)$ είναι κυρτή στο $[\alpha,\beta]$ να δείξετε ότι η C_f έχει θέση σημείου καμπής στο (a,β) .

<u>Άσκηση 11.</u> Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$

α) Για κάθε $x\in(0,1]$ δείξτε ότι υπάρχει $c\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(c)=\dfrac{f(x)}{x}$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με: $g(x)=(1-x)^a\cdot f(x)$, $a\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την συνάρτηση g στο $[0,1]$ και ότι υπάρχει $\kappa\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $(1-\kappa)f'(\kappa)=a\cdot f(\kappa)$

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση f αν $f(1)=0$ και $(1-x)f'(x)-af(x)=0$ για κάθε $x\in(0,1)$

<u>Άσκηση 12.</u> Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε για κάθε $x\in[0,\pi]$ να ισχύει: $f^3(x)-f^2(x)+f(x)=1-\eta\mu x$.

α) Να μελετήσετε την μονοτονία και τα ακρότατα της f στο $[0,\pi]$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο $[0,\pi]$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, ώστε $f'(\xi)=-\dfrac{2}{\pi}$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $x_0\in(0,\pi)$ στο οποίο η εφαπτόμενη της να είναι παράλληλη με την ευθεία $y=2016$

ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot f''(x)\,dx$

<u>Άσκηση 13.</u> Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a,\beta]$ και ισχύει ότι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(a)\neq f(\beta)$

β) Υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ ώστε να ισχύει: $5f(x_0)=2f(a)+3f(\beta)$

γ) Υπάρχουν $x_1,x_2\in(a,\beta)$ τέτοιοι ώστε : $f'(x_1)\cdot f'(x_2)>0$

<u>Άσκηση 14.</u> Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x,y>0$ να ισχύει $f(x\cdot y)=x\cdot f(y)+y\cdot f(x)$ (1)

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

β) Να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x+1$ έχει μοναδική ρίζα.

Άσκηση 15. Έστω οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν F, G είναι παράγουσες των f και g αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει ότι:

- $F(0)=G(1)=0$,
- $F(1)=G(0)$ και
- $F(x)+G(1-x)\geq x^2-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$

β) $f(0)+f(1)=g(0)+g(1)$

γ) Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=g(1-\xi)$

δ) Υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(x_0)+g'(1-x_0)=2$

Άσκηση 16. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g που είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και για τις οποίες ισχύει:

- $f(\kappa-x)=g(x)$, $\kappa\in\mathbb{R}$, $\kappa>0$
- g: άρτια

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι C_f , C_g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη $x_0\in[0,\kappa]$

β) Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο με τετμημένη $\frac{\kappa}{2}$, είναι παράλληλη της εφαπτόμενης της C_g στο σημείο με τετμημένη $-\frac{\kappa}{2}$.

γ) Υπάρχει $\xi\in(0,2\kappa)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(\xi)=0$

δ) Αν f κοίλη στο διάστημα $(0,2\kappa)$, να δείξετε ότι είναι $\xi=\kappa$

Άσκηση 17. Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με $f(1)=2$. Αν για κάθε $x>0$ ισχύει: $x\cdot f'(x)-f(x)=x$ (1) να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}-\ln x$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$

β) Η συνάρτηση f έχει τύπο: $f(x)=x\cdot\ln x+2x$, $x>0$

γ) Η εξίσωση $f(x)=2016$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1,1008)$

δ) Η συνάρτηση $a(x)=f(x)-e^{x-1}$, έχει ένα μόνο σημείο καμπής το οποίο και να προσδιορίσετε.

Άσκηση 18. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^5(x)+2f(x)=x-1 \quad (1)$$

α) Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β) Να βρείτε την εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμπής.

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1}

δ) Αν $g(x)=\frac{f^{-1}(x)}{x^4}$, να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στην γραφική παράσταση της g , την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

<u>Άσκηση 19.</u> Έστω συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ κυρτή με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύει $f(1)=1$, $f'(1)=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\dfrac{F(x)}{x-1} & ,x>1\\ 1 & ,x=1\end{cases}$ όπου F είναι μία παράγουσα της f με $F(1)=0$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[1,+\infty)$

β) Να βρείτε την συνάρτηση g'

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

δ) Να δείξετε ότι για κάθε $a,\beta\in\mathbb{R}$ με $1<a<\beta$ ισχύει $\dfrac{F(a)}{F(\beta)}<\dfrac{a-1}{\beta-1}$

<u>Άσκηση 20.</u> Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(f(x)\right)+f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι $f\left(f(x)+x\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(t)+t=0$

<u>Άσκηση 21.</u> Μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,a]$, γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $[0,a]$, με $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) για κάθε $x\in(0,a)$ ισχύει: $\dfrac{f(x)}{x}<\dfrac{f(a)}{a}$

β) υπάρχει μοναδικός $x_0\in(0,a)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f'(x_0)=\dfrac{f(a)}{a}$

γ) οποιαδήποτε εφαπτόμενη της C_f, παράλληλη σε χορδή με αρχή το $O(0,0)$, εφάπτεται με τη C_f σε σημείο με τετμημένη $x<x_0$

<u>Άσκηση 22.</u> Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε για κάθε $x>0$ να ισχύει:

- F μία παράγουσα της f με $F(1)=0$
- G μία παράγουσα της g με $G(1)=0$
- $F(x)-G(x)=\ln x^2-x^2+2$ (1)

α) Αν η g έχει ρίζες ρ_1,ρ_2 με $0<\rho_1<1<\rho_2$, να δείξετε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ρ_1,ρ_2)

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi)<-2$

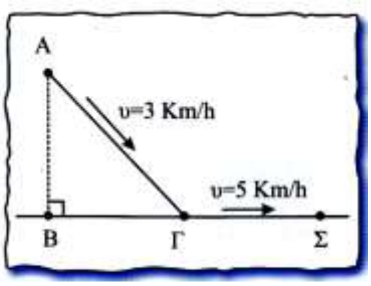
γ) Αν η f είναι κοίλη, να δείξετε ότι και η g είναι κοίλη και για $x=\xi$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των C_f, C_g και της ευθείας $x=e$

Προβλήματα

__Άσκηση 23.__ Ένα αυτοκίνητο έχει διανύσει 300 km με σταθερή ταχύτητα. Το κόστος της βενζίνης είναι 1 ευρώ το λίτρο και η κατανάλωση είναι $\left(2+\frac{x^2}{300}\right)$ λίτρα την ώρα, όπου x είναι η ταχύτητα του οχήματος. Να βρείτε την ποίο οικονομική ταχύτητα.

__Άσκηση 24.__ Ένας τύπος βρίσκεται στο σημείο Α της όχθης ενός ποταμού και πηγαίνει στο σημείο Σ που είναι το σπίτι του. Μπορεί να χρησιμοποιήσει βάρκα που κινείται με σταθερή ταχύτητα $3km/\mathrm{h}$ και να περπατήσει με σταθερή ταχύτητα $5km/h$. Μετά από πολλά δρομολόγια αντιλαμβάνεται ότι για την διαδρομή ΑΓΣ ελαχιστοποιείται ο χρόνος. Οι αποστάσεις είναι $(AB)=4km$, $(\mathrm{B\Sigma})=12km$. Να βρείτε:



α) το συνολικό χρόνο της διαδρομής
β) την θέση του Γ που ελαχιστοποιείται το χρόνο της διαδρομής
γ) το χρόνο που διαρκεί η διαδρομή ΑΓΣ

__Άσκηση 25.__ Ο W. Estes είχε ασχοληθεί με την καμπύλη εκμάθησης ενός πειραματόζωου. Το πείραμα μέσα σε ένα ελεγχόμενο χώρο έπρεπε να επιλέξει τον κατάλληλο μοχλό ώστε να πάρει το φαγητό του. Με την πάροδο του χρόνου το πειραματόζωο είχε όλο και μεγαλύτερο αριθμό σωστών επιλογών r (σε μία εβδομάδα) τις οποίες ο ερευνητής προσέγγισε μέσω του τύπου

$r(t)=\frac{13}{1+25\cdot e^{-0.24t}}$, όπου t ο χρόνος εκπαίδευσης σε εβδομάδες.

α) Να αποδείξετε ότι το πειραματόζωο θα βελτιώνει συνεχώς τις επιδόσεις του.
β) Να βρείτε το $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)$ και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα.

__Άσκηση 26.__ Έστω μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και οι θετικοί αριθμοί α, β, και γ για τους οποίους υποθέτουμε ότι:

- Είναι διαδοχικοί όροι γνησίως αύξουσας γεωμετρικής προόδου και
- Οι τιμές $f(\ln a), f(\ln\beta)$ και $f(\ln\gamma)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\ln a,\ln\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$

__Άσκηση 27.__ Σε μία καλλιέργεια βακτηριδίων *Hlimitzouril*, το πλήθος τους $B(t)$ σε εκατομμύρια βακτηρίδια, μεταβάλλεται με ρυθμό:

$$\frac{dB}{dt}=1003\cdot\left[\frac{1}{t(t+1)}-\frac{\ln(t+1)}{t^2}\right]$$

Όπου $t\geq 0$ ο χρόνος σε ώρες μετά την αρχική τοποθέτηση των βακτηριδίων.
α) Να δείξετε ότι το πλήθος $B(t)$ συνεχώς μειώνεται.
β) Αν σε μία ώρα μετά την έναρξη του πειράματος, ο αριθμός των βακτηριδίων είναι $2006\cdot\ln 2$ εκατομμύρια, να βρείτε το πλήθος $B(t)$.
γ) Να βρεθεί το αρχικό πλήθος βακτηριδίων.
δ) Είναι δυνατών τα βακτηρίδια να αφανισθούν;
ε) Πόσα θα είναι τα βακτηρίδια σε άπειρο χρόνο;