Φροντιστήριο Μ.Ε. «ΑΙΧΜΗ»

Ασκήσεις Επανάληψης Γ΄ Λυκείου

Ασκήσεις Επανάληψης σε όλο το εύρος της διδακτέας ύλης

Κων/νος Παπασταματίου
Κ. Καρτάλη 28 (με Δημητριάδος)
Τηλ. 2421 302 598

Περιεχόμενα

Συνδυαστικά Θέματα

'Ασκηση 1. Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύουν $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, $f(a)<0<f(\beta)$ και $0<f'(a)<f'(\beta)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(a,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=0$
δ) Για το παραπάνω ξ να αποδείξετε ότι $(\beta-\xi)f(a)+(\xi-a)f(\beta)>0$

'Ασκηση 2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$,$\alpha>0$. Αν το πολυώνυμο έχει τρείς πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2,ρ_3 να αποδείξετε ότι:

α) $\beta^2>3\alpha\gamma$
β) Το πολυώνυμο παρουσιάζει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα.
γ) Αν x_1,x_2 , οι θέσεις τοπικών ακροτάτων τότε $P''(x_1)+P''(x_2)=0$
δ) Δεν είναι δυνατόν να έχει το πολυώνυμο σημείο καμπής σε κάποιο από τα x_1,x_2
ε) Ανάμεσα στα ακρότατα υπάρχει μοναδικό σημείο καμπής
στ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{P(x)}{x^2+\gamma x+\delta}$ έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y=2x+25$ και κατακόρυφες τις $x=-1$ και $x=13$ να αποδείξετε ότι $P(x)=2x^3+x^2-12x-13$

'Ασκηση 3. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ για την οποία δίνονται $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[1,2]$ και $f(1)=0$, $f(2)=2$, $f'(2)=1$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)<-1$
δ) Να αποδείξετε ότι

i. $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>\dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$, $x\in(1,2)$

ii. $f(x)\geq 2(x-1)$, $x\in[1,2]$

iii. $\int_1^2 f(x)dx\geq 1$

ε) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x+y=2$ τέμνει ακριβώς σε ένα μόνο σημείο τη γραφική παράσταση της f.
στ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,2)$ με $\xi_1<\xi_2$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=f'(\xi_1)+2$

'Ασκηση 4. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f(\beta)=2f(a)$ ώστε να ισχύει: $f'(x)=2f^2(x)-4f(x)+4$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα
β) $f(a)>0$

γ) Ισχύει $\int_{a}^{\beta} f(x)dx < \ln 2$

δ) Αν $f(a) > 1$, τότε:

i. Η f είναι κυρτή
ii. Δεν υπάρχουν στην γραφική παράσταση της f, τρία διαφορετικά σημεία τα οποία να είναι συνευθειακά.

'Ασκηση 5. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1)=1$ και $x^2\left(f'(x)-1\right)=\ln x-1$ για κάθε $x>0$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\dfrac{\ln x}{x}$, $x>0$ ισούται με την ταυτοτική στο $(0,+\infty)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $x^{\frac{1}{x+1}} \geq e^{1-x}$ όταν $x\geq 1$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1, x=e$

'Ασκηση 6. Δίνονται οι παραβολές: $C_1: y=-\dfrac{4}{9}x^2+\dfrac{8}{3}x$ και $C_2: y=-\dfrac{5}{9}x^2+\dfrac{10}{3}x$

α) Να βρείτε τα κοινά τους σημεία με τον άξονα $x'x$.

β) Να σχεδιάσετε τα τμήματα των παραβολών που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ) Μία αψίδα διακοσμεί την είσοδο ενός κτηρίου. Η αψίδα αυτή ορίζεται από τις παραβολές C_1 και C_2 . Να βρείτε το εμβαδόν της αψίδας.

'Ασκηση 7. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $(f\circ f)(x)=x^2-9x+25$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(5)=5$

β) Η γραφική παράσταση της f τέμνει την διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου σε ένα τουλάχιστον σημείο.

γ) η f δεν είναι «1 – 1»

'Ασκηση 8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+1$

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ και $f''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

δ) Να μελετήσετε τη f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $x\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\sqrt{x^2+1}-1$

'Ασκηση 9. Έστω F μία παράγουσα της συνεχούς συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f(x)F(-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $F(x)\cdot F'(-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $F(x)\cdot F(-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}F(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

δ) ο τύπος της f είναι $f(x)=e^{x}$

'Ασκηση 10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x}-1-\ln(x+1)$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α της $f(x)$ και το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα $y'y$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

γ) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $f(x)$

δ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$

ε) Να αποδείξετε ότι $1+\ln(x+1)\le e^{x}$ για κάθε $x>-1$

στ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x)$ και τα ολικά ακρότατα.

ζ) Αν $a^{x}\ge 1+\ln(x+1)$ για κάθε $x>-1$, να αποδείξετε ότι $a=e$

'Ασκηση 11. Μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τη σχέση $f(x)-e^{-f(x)}=x-1$.

α) Να εκφραστεί η $f'(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$

β) Να αποδειχθεί ότι $f(0)=0$

γ) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και το πρόσημο

δ) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $\frac{x}{2}\le f(x)\le xf'(x)$

'Ασκηση 12. Έστω F μία αρχική της συνεχούς συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με την ιδιότητα $2aF(x^2)\ge a^2+F^2(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου $a\ne 0$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $F(0)=F(1)=a$

β) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$

'Ασκηση 13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x,\ x>0$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να αποδειχθεί ότι η f έχει ολικό ελάχιστο, το οποίο και να βρεθεί.

γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ή οριζόντια ασύμπτωτη.

ε) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$

'Ασκηση 14. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x)=e^{-F(x)}$ για κάθε $x>0$, όπου F μία παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $F(1)=0$.

Α) Να αποδειχθεί ότι:

α) $f'(x)=-f^2(x)$ για κάθε $x>0$

β) $f(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$

Β) Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο μεταβλητό της σημείο Μ τέμνει τους άξονες στα σημεία Α και Β. Να αποδειχθεί ότι:

α) $MA=MB$

β) το τρίγωνο ΟΑΒ έχει σταθερό εμβαδόν, ανεξάρτητο δηλαδή από τη θέση του Μ.

'Ασκηση 15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2\left(e^{-x}-2\right)$ και $g(x)=x^2\left(x^2-e^x\right)$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=g(x)$

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των f ,g και της ευθείας $x=1$

'Ασκηση 16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2x+\eta\mu x}$, $x\geq 0$.

α) Να βρεθεί η μονοτονία της f.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδειχθεί ότι ορίζεται η f^{-1} και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

δ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{2\sqrt{\pi}} x\cdot f^{-1}(x)\,dx$

'Ασκηση 17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+e^x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδειχθεί ότι ορίζεται η $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ότι ικανοποιεί τη σχέση $e^{f^{-1}(x)}+f^{-1}(x)=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$

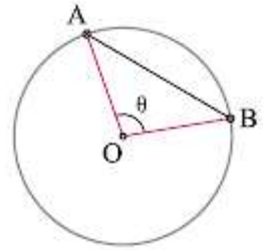
ε) Να λυθεί η ανίσωση $e^{x^2}-e^{x+2}<x+2-x^2$

στ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1} , την ευθεία $x=e$ και τον άξονα $x'x$

ζ) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{e} x\cdot f^{-1}(x)\,dx$

Προβλήματα

'Ασκηση 18. Δίνεται ένας κύκλος (O, R) και μία μεταβλητή χορδή ΑΒ, της οποίας το άκρο Α είναι σταθερό.



α) Να εκφράσετε το μήκος του τόξου AB ως συνάρτηση της γωνίας $\theta = \mathrm{AOB}$, όπου το θ μετρείται σε rad.

β) Να αποδείξετε ότι το μήκος της χορδής ΑΒ δίνεται από τη σχέση $\mathrm{AB} = 2 \cdot R \cdot \eta\mu \frac{\theta}{2}$, όπου $\theta = \mathrm{AOB}$

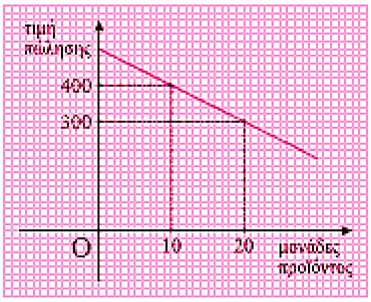
γ) Να βρείτε το όριο του λόγου $\frac{AB}{AB}$, όταν το Β τείνει στο Α.

'Ασκηση 19. Ο χώρος εκτύπωσης κάθε σελίδας ενός βιβλίου είναι μία ορθογώνια περιοχή με εμβαδόν $270cm^2$. Τα λευκά περιθώρια της σελίδας είναι $2,5cm$ πάνω και κάτω και $3cm$ για τα πλευρικά.

α) Αν x είναι το πλάτος του χώρου εκτύπωσης, να εκφράσετε το εμβαδόν $E(x)$ της σελίδας του βιβλίου ως συνάρτηση του x.

β) Να βρείτε τις διαστάσεις της σελίδας, για τις οποίες αυτή έχει το ελάχιστο εμβαδόν.

'Ασκηση 20. Μία εταιρεία έχει αποφασίσει ότι για την ανταγωνιστικότητα του προϊόντος της θα μπορέσει να μειώσει την τιμή πώλησης ανά μονάδα, αν αυξηθεί η ημερήσια παραγωγή. Ο υπεύθυνος πωλήσεων που έκανε τη σχετική μελέτη ανακοίνωσε τον τρόπο διαμόρφωσης της τιμής πώλησης, δείχνοντας τον παρακάτω πίνακα:



Η εταιρεία μπορεί να παράγει ημερησίως μέχρι 30 τεμάχια.

α) Να εκφράσετε τα ημερήσια έσοδα της εταιρείας από την πώληση όλης της παραγωγής ως συνάρτηση των παραγόμενων μονάδων του προϊόντος.

β) Να βρείτε το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα ημερήσια έσοδα.

γ) Να βρείτε τα μέγιστα αυτά ημερήσια έσοδα.

'Ασκηση 21. Τα άκρα Α και Β ενός ευθυγράμμου τμήματος $(AB) = 10cm$ ολισθαίνουν αντίστοιχα επί των ημιαξόνων Ox και Oy ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων xOy. Τη χρονική στιγμή t_0 το Α απέχει από το Ο $6cm$ και η ταχύτητα του είναι $4cm/s$

α) Αν $OA = x$ και $OB = y$, να γραφεί η σχέση που εκφράζει το y ως συνάρτηση του x.

β) Να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία το σημείο Β πλησιάζει την αρχή Ο, τη χρονική στιγμή που απέχει $8cm$ από αυτή.

γ) Να εκφραστεί το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΟΑΒ ως συνάρτηση του x.

δ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε του τριγώνου ΟΑΒ ως προς τον χρόνο, ως συνάρτηση των x και $\frac{dx}{dt}$

ε) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε την χρονική στιγμή t_0 .

'Ασκηση 22. Η δεξαμενή ύδρευσης ενός χωριού έχει στις 6 π.μ. $149m^3$ νερού. Οι κάτοικοι καταναλώνουν νερό με ρυθμό $t \cdot e^{4-t}\ m^3 / h$, όπου t είναι ο χρόνος σε ώρες μετρούμενος από τις 6 π.μ. Συγχρόνως όμως υπάρχουν απώλειες από το δίκτυο, οι οποίες εκτιμήθηκαν σε 25 m^3 / h . Αν η δεξαμενή δεν εισέρχεται νερό από τις 6 το πρωί έως τις 12 το μεσημέρι, να βρεθεί:

α) ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η ποσότητα $Q(t)$ του νερού της δεξαμενής.

β) η ποσότητα $Q(t)$ του νερού της δεξαμενής ύστερα από t ώρες.

γ) τι ώρα ο ρυθμός μεταβολής του νερού της δεξαμενής είναι ελάχιστος

δ) τι ώρα θα αδειάσει η δεξαμενή

(δίνεται ότι $e^4 \cong 54$)