ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ, 20 ΜΑΪΟΥ 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Θέμα Α

Α1. Απόδειξη σελίδα 31 σχολικού βιβλίου.

Α2. Ορισμός σελίδα 22 σχολικού βιβλίου.

Α3. Ορισμός σελίδα 86-87 σχολικού βιβλίου.

Α4.

- **α) Λ**
- **β) Σ**
- **γ) Λ**
- **δ) Λ**
- **ε) Σ**

Θέμα Β

Β1.

$$(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \quad \mathbf{(1)}$$

$3x-1$ ή $8x^2-6x+1=0$

$x=\frac{1}{3}$ ή $x=\frac{1}{2}$ ή $x=\frac{1}{4}$

Άρα το σύνολο των λύσεων της $(\mathbf{1})$ είναι $\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$
με $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$

Επειδή $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

Ισχύει $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$

Οπότε $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

αφού οι πιθανότητες, $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(A \cup B)$

είναι διαφορετικές ανά δύο μεταξύ τους.

Β2.

$$\begin{aligned} P(A' - B') &= P(A') - P(A' \cap B') \\ &= 1 - P(A) - P((A \cup B)') \\ &= 1 - P(A) - \big(1 - P(A \cup B)\big) \\ &= 1 - \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$P(B) = \frac{5}{12}$$

Άρα $P(\Delta) = P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Β3.

$$P(E) = P\big((A-B)\cup(B-A)\big)$$

$$= P(A-B) + P(B-A)$$

$$= P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{5}{12} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Β4.

$$9x^2 - 3x - 2 = 0 \;\; (\mathbf{2})$$

$x = \frac{2}{3}$ ή $x = -\frac{1}{3}$

Άρα το σύνολο των λύσεων της $(\mathbf{2})$ είναι $\left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$

Οπότε $\mathrm{P}(\Gamma) = \frac{2}{3}$ αφού $0 \le \mathrm{P}(\Gamma) \le 1$

Έστω B, Γ ενδεχόμενα ασυμβίβαστα.

$\mathrm{P}(\mathrm{B}\cup\Gamma) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1$ άτοπο

Άρα τα ενδεχόμενα B, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

Θέμα Γ

Γ1.

Από 1^{η} πληροφορία έχουμε $f_1\% = 10$ άρα $f_1 = 0{,}1$

Από 2^{η} πληροφορία έχουμε $f_5\% = 30$ άρα $f_5 = 0{,}3$

Από 3^{η} πληροφορία έχουμε $a_3 = 108 \Leftrightarrow$

$$360 f_3 = 108 \Leftrightarrow$$

$$f_3 = \frac{108}{360} \Leftrightarrow$$

$$f_3 = 0{,}3 = 30\%$$

Από 4^{η} πληροφορία έχουμε $\bar{x} = 14 \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 14 \Leftrightarrow$$

$$9 * 0.1 + 11 f_2 + 13 * 0.3 + 15 f_4 + 17 * 0.3 = 14 \Leftrightarrow$$

$$11 f_2 + 15 f_4 = 4{,}1 \ \ (\mathbf{1})$$

Ισχύει $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow$

$$0{,}1 + f_2 + 0{,}3 + f_4 + 0{,}3 = 1 \Leftrightarrow$$

$$f_2 = 0{,}3 - f_4 \ \ (\mathbf{2})$$

Διεύθυνση: Χρήστος Α. Χαρακόπουλος
Μ. Αλεξάνδρου 49, 3ος όροφος, Δράμα, τηλ.: 25210 21972, κιν.: 6973585563
www.akademia.gr / e-mail: info@akademia.gr

Οπότε $(\mathbf{1}) \overset{(\mathbf{2})}{\Leftrightarrow}$

$11(0{,}3 - f_4) + 15f_4 = 4{,}1 \Leftrightarrow$

$4f_4 = 0{,}8 \Leftrightarrow$

$f_4 = 0{,}2 = 20\%$

Άρα $f_2 = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1 = 10\%$

Δηλαδή $f_1\% = 10\,,\ f_2\% = 10\,,\ f_3\% = 30\,,\ f_4\% = 20\,,\ f_5\% = 30$

Γ2.

Κλάσεις	$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{f_i}\%$
[8 , 10)	9	10
[10 , 12)	11	10
[12 , 14)	13	30
[14 , 16)	15	20
[16 , 18)	17	30

<u>**(Προαιρετικός)**</u>

$$s^2 = \sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 f_i$$

$$= (9-14)^2 0{,}1 + (11-14)^2 0{,}1 + (13-14)^2 0{,}1 + (15-14)^2 0{,}2 + (17-14)^2 0{,}3$$

Δηλαδή $s^2 = 6{,}6$

Άρα $s = \sqrt{6{,}6} \approx 2{,}57$

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2{,}57}{14} \approx 18\% > 10\%$$

Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{v} \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i + x_5 v_5}{v} \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v} + x_5 \frac{v_5}{v} \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{1780}{v} + 17 f_5 \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{1780}{v} + 17 * 0{,}3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1780}{v} = 14 - 5{,}1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1780}{v} = 8{,}9 \Leftrightarrow$$

$$v = \frac{1780}{8{,}9} \Leftrightarrow$$

$$v = 200$$

Διεύθυνση: Χρήστος Α. Χαρακόπουλος
Μ. Αλεξάνδρου 49, 3ος όροφος, Δράμα, τηλ.: 25210 21972, κιν.: 6973585563
www.akademia.gr / e-mail: info@akademia.gr

Γ4.

$$\beta_i = \frac{a_i - \bar{a}}{s_a}$$

$$\beta_i = \frac{1}{s_a} a_i - \frac{\bar{\alpha}}{s_a}$$

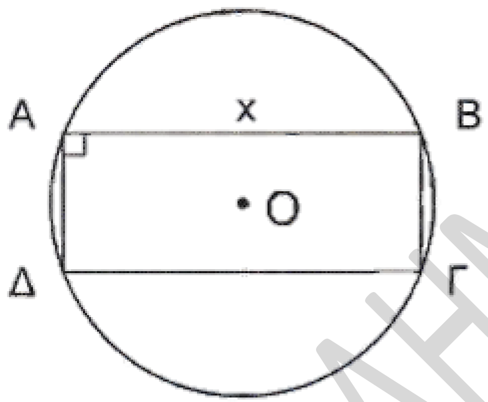
Εφαρμογή 3 σελίδα 99 σχολικού βιβλίου

$$\bar{\beta} = \frac{1}{s_a}\bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{s_a} = 0$$

$$s_\beta = \left|\frac{1}{s_\alpha}\right| s_\alpha = \frac{s_a}{s_a} = 1$$

Θέμα Δ

Δ1.



Η $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου, γιατί η γωνία $\hat{A}$ είναι εγγεγραμμένη και ορθή οπότε θα βαίνει σε ημικύκλιο.
Δηλαδή $(B\Delta) = 2\rho = 2 * 5 = 10$
Επίσης AB χορδή του κύκλου επομένως $0 < x < \delta$ (διάμετρος)
Δηλαδή $0 < x < 10$
Με Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$(B\Delta)^2 = (A\Delta)^2 + (AB)^2 \Leftrightarrow$

$100 = (A\Delta)^2 + x^2 \Leftrightarrow$

$(A\Delta)^2 = 100 - x^2$

Οπότε $(A\Delta) = \sqrt{100 - x^2}$ (αφού $(A\Delta) > 0$)

Το ζητούμενο εμβαδό λοιπόν είναι $(A\Delta) * (AB) = x\sqrt{100 - x^2}$

Δηλαδή $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$

Δ2.

$f'(x) = (x)'\sqrt{100 - x^2} + x\left(\sqrt{100 - x^2}\right)'$

$= \sqrt{100 - x^2} + x\frac{(100-x^2)'}{2\sqrt{100-x^2}}$

$= \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

$= \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

Είναι $\sqrt{100 - x^2} > 0$ για κάθε $x \in (0,10)$ οπότε το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή.
Θέτω $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{50}$ όμως $x \in (0,10)$ άρα $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Ο πίνακας μεταβολών είναι

$\boldsymbol{x}$	0		$5\sqrt{2}$		10
$\boldsymbol{f'(x)}$	‖	+	0	-	‖
$\boldsymbol{f(x)}$	‖	↗		↘	‖

Για $x = 5\sqrt{2}$ το εμβαδό γίνεται μέγιστο.

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{AB}) = x = 5\sqrt{2} \\[2ex] (\mathrm{A\Delta}) = \sqrt{100 - x^2} = 5\sqrt{2}\end{array}\right\} \quad (AB) = (A\Delta) \qquad \text{Άρα είναι τετράγωνο}$$

Δ3.

Είναι $f(1) = 1\sqrt{100 - 1^2} = \sqrt{99}$ οπότε το ζητούμενο όριο παίρνει τη μορφή:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x+1) - \sqrt{99}}{98x} = \frac{1}{98} \lim_{x \to 0} \frac{f(x+1) - f(1)}{x} = \frac{1}{98} f'(1)$$

$$= \frac{1}{98} * \frac{100 - 2}{\sqrt{100 - 1}} = \frac{1}{98} * \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ4.

Είναι $0 < P(A-B) \le 1 \ (\mathbf{1})$

και $0 < P(A) \le 1$ άρα $P^2(A) \le 1$

$$P^2(A) \le 1 \Leftrightarrow -P^2(A) \ge -1 \Leftrightarrow 100 - P^2(A) \ge 99 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{100 - P^2(A)} \ge \sqrt{99} \Leftrightarrow$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}} \quad (\mathbf{2})$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις $(\mathbf{1})$ και $(\mathbf{2})$ κατά μέλη έχουμε:

$$0 < \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}} \le 1$$

Ακόμη

$0 < P(A) \le 1 \ (\mathbf{3})$

και $0 < P(A-B) \le 1$ άρα $P^2(A-B) \le 1$

$$P^2(A-B) \le 1 \Leftrightarrow -P^2(A-B) \ge -1 \Leftrightarrow 100 - P^2(A-B) \ge 99 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{100 - P^2(A-B)} \ge \sqrt{99} \Leftrightarrow$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}} \quad (\mathbf{4})$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις $(\mathbf{3})$ και $(\mathbf{4})$ κατά μέλη έχουμε:

$$0 < \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}} \le 1$$

Δηλαδή οι παραπάνω ποσότητες, καθώς και οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(A-B)$, ανήκουν στο διάστημα $\left(0\,,5\sqrt{2}\right)$ στο οποίο η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
Ισχύουν λοιπόν οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right) \Leftrightarrow$ **(f γνησίως αύξουσα)**

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \Leftrightarrow$$

$$P(A-B)\sqrt{100-P^2(A-B)} \leq P(A)\sqrt{100-P^2(A)} \Leftrightarrow$$

$f\big(P(A-B)\big) \leq f\big(P(A)\big) \Leftrightarrow$ **(f γνησίως αύξουσα)**

$$P(A-B) \leq P(A)$$

Που ισχύει αφού $A-B \subseteq A$