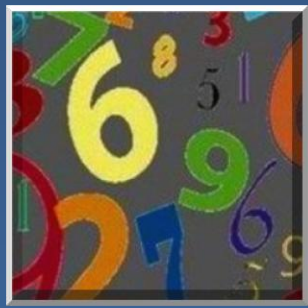

Διαγωνίσματα προσομοίωσης

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Ημερήσιο Γενικό Λύκειο
Γ' Τάξη

Κωνσταντίνος Παπασταματίου

Ο Κωνσταντίνος Παπασταματίου

Γεννήθηκε το 1980 στο Βόλο. Το 1998 εισήχθη στη Σχολή Θετικών Επιστημών, στο τμήμα των Μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου, απ' όπου έλαβε το πτυχίο του το 2002. Από το 2002 ασχολήθηκε με ιδιαίτερα μαθήματα, ενώ από το 2010 διευθύνει το «Φροντιστήριο Μ.Ε. ΑΙΧΜΗ», στο Βόλο (Κ. Καρτάλη 28 – Δημητριάδος, τηλ. 24213 – 02598)

Κωνσταντίνος Παπασταματίου

Διαγωνίσματα προσομοίωσης

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Ημερήσιο Γενικό Λύκειο
Γ' Τάξη

schooltime.gr

schooltime.gr, Εκπαιδευτική σειρά «Διαγωνίσματα προσομοίωσης»: Μαθηματικά Κατεύθυνσης, Ημερήσιο ΓΕΛ, Γ΄ τάξη

Επιμέλεια: Κωνσταντίνος Παπασταματίου

Ιούνιος 2014

Εκδοτική επιμέλεια

Γιώργος Β. Σκάθαρος

Εκδόσεις schooltime.gr

Εκπαίδευση & πολιτισμός

Τηλ.: 6977554086

e-mail: info@schooltime.gr

website: www.schooltime.gr

Σε συνεργασία με έγκριτους εκπαιδευτικούς, το schooltime.gr παρουσιάζει μια νέα εκπαιδευτική σειρά με τίτλο «Διαγωνίσματα προσομοίωσης».

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου Κατεύθυνσης	Θέματα Προσομοίωσης 2014
Ον/πώνυμο:	**Βαθμός:**

Θέμα Α

Α1. Έστω μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a,\beta]$. Αν G μία παράγουσα της f στο $[a,\beta]$ τότε να αποδείξετε ότι

$\int_a^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(a)$.

Μονάδες 8

Α2. Να αποδείξετε ότι $\left(x^a\right)' = a \cdot x^{a-1}$ όπου $a \in \mathbb{R} - \mathbf{Z}$ και $x > 0$

Μονάδες 7

Α3. Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

2. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α. Αν για κάθε $x \in$ Α ισχύει ότι $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$ τότε η f θα είναι άρτια στο Α.

3. Αν μία συνάρτηση f είναι «1 – 1» τότε είναι και γνησίως μονότονη.

4. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ τότε θα ισχύει ότι $f(a) \cdot f(\beta) < 0$

5. Έστω $z = a + \beta i$ με $a,\beta \in \mathbb{R}$. Ισχύει ότι $z = 0 \Leftrightarrow a = 0$ και $\beta = 0$

Μονάδες 10

Θέμα Β

Β1. Να αποδείξετε ότι: $e^x - x \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα.

Μονάδες 3

Β2. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Για κάθε $x \geq 0$, θεωρούμε το μιγαδικό z, με:

$$z = \int_0^x e^{f(t)}dt + ix\int_0^1 e^{f(x-xt)}dt \quad \text{και} \quad \frac{|z|}{\sqrt{2}} = \int_0^x \left[f(t) + e^t \right] dt + f(a) - 1 \quad \text{όπου α > 0.}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{z}{1+i} = \text{Re}(z) = \text{Im}(z) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$

Μονάδες 5

β) $e^{f(x)} = f(x) + e^x$ για κάθε $x \geq 0$

Μονάδες 4

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 5

δ) Η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 4

ε) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστο $\xi \in (0,a)$ τέτοιο, ώστε $a \cdot f'(\xi)=1$.

Μονάδες 4

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x-\ln x+e^x$, $x \geq 1$.

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 3

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(1, f(1))$ και να δείξετε ότι $f(x) \geq ex+1$ για κάθε $x \geq 1$

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(x+e^x\right)= f(\ln x+2009)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[1,+\infty)$

Μονάδες 5

Γ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e f(x)dx+\int_{1+e}^{e^e+e-1} f^{-1}(x)dx$

Μονάδες 6

Θέμα Δ

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και οι αριθμοί 0< α < β, ώστε $f(a)=\beta$, $f(\beta)=a$ και $f(a+\beta)=0$

Να δείξετε ότι:

Δ1. Υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$, ώστε $f(x_0)=x_0$

Μονάδες 8

Δ2. Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(a,\beta)$με $\xi_1<\xi_2$, ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

Μονάδες 8

Δ3. Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει λύση στο $(a,a+\beta)$.

Μονάδες 9

Εκδόσεις schooltime.gr

Εκπαίδευση & Πολιτισμός

Τηλ.: 6977554086

e-mail: info@schooltime.gr

website: www.schooltime.gr