

Θέμα Α

A1. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **251**

A2. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **273**

A3. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **259**

A4. α. **Λάθος**, β. **Σωστό**, γ. **Σωστό**, δ. **Σωστό**, ε. **Λάθος**

Θέμα Β

B1. Θέτουμε: $z = x + yi$ τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) + 2xyi - 4 - 2i &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + xi - 2 - i &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + xi &= 2 + i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \text{ ή } y = -1 \\ x = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Επομένως, οι λύσεις είναι οι μιγαδικοί: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$.

B2. Έχουμε:

$$w = 3 \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{39} \Leftrightarrow w = 3 \left(\frac{2i}{2} \right)^{39} \Leftrightarrow w = 3 \cdot i^{4 \cdot 9 + 3} \Leftrightarrow w = 3i^3 = -3i$$

B3. Είναι :

$$\begin{aligned}|u + w| &= |4z_1 - z_2 - i| \\ \Leftrightarrow |u - 3i| &= |4 + 4i - 1 + i - i| \\ \Leftrightarrow |u - 3i| &= |3 + 4i| \\ \Leftrightarrow |u - (0 + 3i)| &= 5\end{aligned}$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών u είναι ο κύκλος κέντρου $K(0,3)$ και ακτίνας $\rho = 5$.

Θέμα Γ

Γ1. Η h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

$h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^{x+1}} = \frac{e^{x+1} - e^x}{e^{x+1}} = \frac{1}{e^{x+1}} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} άρα και συνάρτηση $1-1$

Η h' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και η $h''(x) = -\frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} \Leftrightarrow$

$h''(x) = \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η h είναι κοίλη στο \mathbb{R} .

Γ2.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{h(2h'(x))} &< \frac{e}{e+1} \\ \Leftrightarrow \ln(e^{h(2h'(x))}) &< \ln \frac{e}{e+1} \\ \Leftrightarrow h(2h'(x)) &< h(1) \end{aligned}$$

Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} ισοδύναμα προκύπτει:

$$\begin{aligned} 2h'(x) &< 1 \\ \Leftrightarrow h'(x) &< h'(0) \\ \Leftrightarrow x &> 0 \end{aligned}$$

διότι η h' είναι γνησίως φθίνουσα, αφού η h είναι κοίλη στο \mathbb{R} .

Γ3.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{e^x}{e^x + 1} \right]$

Θέτω $u = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$, εφαρμόζοντας τον κανόνα $Dl'H$.

Άρα το ζητούμενο όριο είναι το: $\lim_{u \rightarrow 1} \ln u = \ln 1 = 0$

Επομένως η οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y = 0$.

Για την πλάγια ασύμπτωτη (ε): $y = \lambda x + \beta$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{e^x + 1}} \cdot \left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x} \cdot \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1 \text{ άρα } \lambda = 1, \text{ εφαρμόζοντας τον κανόνα DLH.}$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - \ln(e^x + 1) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-\ln(e^x + 1)].$$

Θέτουμε $u = e^x$, $u_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, οπότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{u \rightarrow 0} [-\ln(u + 1)] = \ln 1 = 0$$

άρα $\beta = 0$. Τελικά η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

Γ4. Βρίσκουμε τα σημεία τομής της $\varphi(x)$ με τον άξονα x' . Είναι:

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow h(x) = -\ln 2 \Leftrightarrow h(x) = h(0) \Leftrightarrow x = 0 \text{ αφού η } h \text{ είναι } 1 - 1.$$

$$E = \int_0^1 |e^x(h(x) + \ln 2)| dx$$

$$E = \int_0^1 \left| e^x \left(\ln \frac{e^x}{e^x + 1} + \ln 2 \right) \right| dx$$

$$E = \int_0^1 \left| e^x \cdot \ln \left(\frac{2e^x}{e^x + 1} \right) \right| dx \text{ και επειδή } \frac{2e^x}{e^x + 1} > 1 \text{ έχουμε:}$$

$$E = \int_0^1 e^x \cdot \ln \left(\frac{2e^x}{e^x + 1} \right) dx$$

$$E = \int_0^1 (e^x)' \cdot \ln \left(\frac{2e^x}{e^x + 1} \right) dx$$

$$E = \int_0^1 \left[e^x \cdot \ln \frac{2e^x}{e^x + 1} \right]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot \frac{e^x + 1}{2e^x} \left(\frac{2e^x}{e^x + 1} \right)' dx$$

$$E = e \cdot \ln \frac{2e}{e + 1} - \ln 1 - \int_0^1 \frac{(e^x + 1)}{2} \cdot \frac{2e^x(e^x + 1) - e^x \cdot 2e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

$$E = e \cdot \ln \frac{2e}{e + 1} - \int_0^1 \frac{2e^{2x} + 2e^x - 2e^{2x}}{2(e^x + 1)} dx$$

$$E = e \cdot \ln \frac{2e}{e + 1} - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$E = e \cdot \ln \frac{2e}{e + 1} - [\ln(e^x + 1)]_0^1$$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

$$E = e \cdot \ln \frac{2e}{e+1} - \ln(e+1) + \ln 2 = e + (e+1) \cdot \ln \left(\frac{2}{e+1} \right) \quad \tau. \mu.$$

Θέμα Δ

Δ1. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 = f(0) \text{ χρησιμοποιώντας κανόνα } D.l'H.$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* με:

$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = xe^x - e^x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με: $g'(x) = xe^x$

Θέτουμε: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $g'(x) > 0 \Leftrightarrow xe^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Έτσι κατασκευάζουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		\circ	
		-	+
g		\swarrow	\searrow

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$ με τη ισότητα να ισχύει για $x = 0$.

Συνεπώς: $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και αφού f είναι συνεχής στο $x = 0$,

η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Δ2α. Έστω η συνάρτηση

$$h(x) = \int_1^x f(u) du, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$.

Πράγματι, για $x > 0$ είναι: $e^x - 1 > 0$ οπότε: $f(x) > 0$,

για $x < 0$ είναι: $e^x - 1 < 0$ οπότε: $f(x) > 0$ και αφού $f(0) = 1 > 0$ ισχύει: $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, η h είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Επίσης, για το $f'(0)$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

χρησιμοποιώντας κανόνα Dl'H.

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Η εξίσωση γίνεται: $h(2f'(x)) = 0 \Leftrightarrow h(2f'(x)) = h(1) \Leftrightarrow 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow x = 0$, αφού η h και η f' είναι «1-1».

β. Για την τεταγμένη $y(t)$ του σημείου M ισχύει:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{e^{x(t)} - 1}{x(t)}, & \text{για } x(t) \neq 0 \\ 1, & \text{για } x(t) = 0 \end{cases}$$

Δηλαδή: $y(t) = f(x(t))$ και συνεπώς είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$y'(t) = \begin{cases} f'(x(t)) \cdot x'(t), & \text{για } x(t) \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{για } x(t) = 0 \end{cases}$$

Ζητούνται τα σημεία για τα οποία: $y'(t) = \frac{1}{2}x'(t) \Leftrightarrow f'(x(t)) \cdot x'(t) = \frac{1}{2}x'(t)$
 $\Leftrightarrow f'(x(t)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x(t)) = f'(0) \Leftrightarrow x(t) = 0$, αφού f' έχει την ιδιότητα 1-1.
Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το $M(0,1)$.

Δ3. $g(x) = (e^x - 1 + 1 - e)^2(x - 2)^2$, $x > 0$.

$$g(x) = (e^x - e)^2(x - 2)^2, \quad x > 0.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = 2(e^x - e)e^x(x - 2)^2 + (e^x - e)^2 2(x - 2)$$

$$g'(x) = 2(e^x - e)(x - 2)[e^x(x - 2) + e^x - e]$$

$$g'(x) = 2(e^x - e)(x - 2)(xe^x - e^x - e).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = xe^x - e^x - e$, με $x > 0$

Η K είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$:

$$K'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x > 0, \text{ για κάθε } x \text{ θετικό}$$

άρα η $K(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι:

$$\left. \begin{array}{l} K(1) = -e < 0 \\ K(2) = e^2 - e > 0 \end{array} \right\} K(1)K(2) < 0$$

Επειδή K συνεχής στο $[1,2]$, από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (1,2)$

τέτοιο ώστε $K(\rho) = 0$ και η $K(x)$ γνησίως μονότονη επομένως $\Leftrightarrow f'(x) = f'(0)$

η εξίσωση $K(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = \rho$.

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Για $1 < x < \rho$ ισχύει: $K(x) < K(\rho) \Leftrightarrow K(x) < 0$

Για $\rho < x < 2$ ισχύει: $K(x) > K(\rho) \Leftrightarrow K(x) > 0$

Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

x	0	1	ρ	2	$+\infty$
$e^x - e$	-	•	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	•	+
$K(x)$	-	-	•	+	+
$g'(x)$	-	+	-	+	+

Ο πίνακας μεταβολών της g είναι:

x	0	1	ρ	2	$+\infty$		
$g'(x)$	-	•	+	•	-	•	+
g		→	→	→	→		

Η g είναι γνησίως αύξουσα στα $[1, \rho]$ και $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $(0, 1]$ και $[\rho, 2]$.

Η g παρουσιάζει για $x = 1$ και $x = 2$ τοπικό ελάχιστο τα $g(1)$ και $g(2)$ αντίστοιχα.

Η g παρουσιάζει για $x = \rho$ τοπικό μέγιστο το $g(\rho)$.

Επιμέλεια: Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Χρήστος Αναστασίου, Μάριος Παπαδιαμαντής, Αλέξανδρος Φιτσόπουλος, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Ηρώ Μαρκάκη