ΗΛΙΑΣΚΟΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΥΨΗΛΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Θετικής - Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
Μαθηματικά Γ΄Λυκείου
Μιγαδικοί Αριθμοί

ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΗΛΙΑΣΚΟΣ

e-mail: info@iliaskos.gr www.iliaskos.gr

1. Μιγαδικοί

1.1 Η έννοια του Μιγαδικού

Ορισμός

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, στο οποίο:

i. Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι, ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο $\mathbb{R}$, με το μηδέν (0) να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το (1) το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.
ii. Υπάρχει ένα στοιχείο i τέτοιο ώστε $i^2 = -1$.
iii. Κάθε στοιχείο z του $\mathbb{C}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ορισμός

Το σύνολο $\mathbb{I}$ ονομάζεται σύνολο των φανταστικών αριθμών και περιλαμβάνει τους φανταστικούς αριθμούς, δηλαδή αριθμούς της μορφής $\beta i, \beta \in \mathbb{R}$.

Προσοχή! Το σύνολο των πραγματικών αριθμών και το σύνολο των φανταστικών αριθμών μαζί δεν δίνουν το σύνολο των μιγαδικών, δηλαδή $\mathbb{R} \cup \mathbb{I} \neq \mathbb{C}$. Το $\mathbb{R} \cup \mathbb{I} \subset \mathbb{C}$.

Ορισμός

Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$.

Ονομάζουμε πραγματικό μέρος του μιγαδικού z και το συμβολίζουμε $\mathrm{Re}(z)$ το α, δηλαδή $\mathrm{Re}(z) = \alpha$.

Ονομάζουμε φανταστικό μέρος του μιγαδικού z και το συμβολίζουμε $\mathrm{Im}(z)$ το β, δηλαδή $\mathrm{Im}(z) = \beta$.

Προσοχή! Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού είναι πραγματικοί αριθμοί.

Μεθοδολογίες

i. Για να μπορέσουμε να βρούμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού, θα πρέπει πάντα να τον φέρουμε στην μορφή $\alpha + \beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
ii. Ένας μιγαδικός είναι πραγματικός όταν το φανταστικό του μέρος είναι μηδέν, δηλαδή $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$.
iii. Ένας μιγαδικός είναι φανταστικός όταν το πραγματικό του μέρος είναι μηδέν, δηλαδή $z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$.

iv. Ένας μη πραγματικός μιγαδικός z είναι ή μιγαδικός ή φανταστικός, δηλαδή βγάζουμε το συμπέρασμα ότι $\text{Im}(z) \neq 0$.

v. Ένας μη φανταστικός μιγαδικός z είναι ή μιγαδικός ή πραγματικός, δηλαδή βγάζουμε το συμπέρασμα ότι $\text{Re}(z) \neq 0$.

Ορισμός

Δύο μιγαδικοί είναι ίσοι, όταν έχουν ταυτόχρονα τα πραγματικά και τα φανταστικά τους μέρη ίσα, δηλαδή:

Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i$.

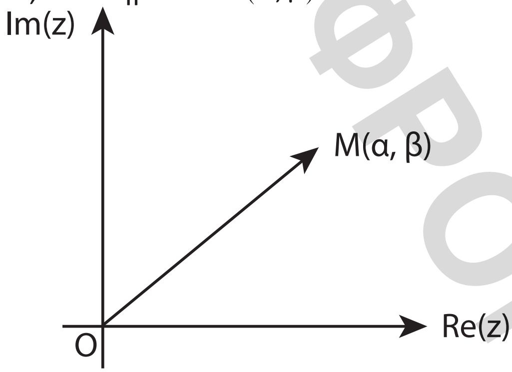
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \\ \text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2) \end{cases}$$

Ορισμός

Κάθε μιγαδικό $z = \alpha + \beta i$ μπορούμε να τον αντιστοιχίσουμε στο σημείο $M(\alpha, \beta)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου. Αλλά και αντιστρόφως $M(\alpha, \beta)$ του καρτεσιανού αυτού επιπέδου μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε στο μιγαδικό $z = \alpha + \beta i$. Το σημείο M λέγεται εικόνα του μιγαδικού z.

Ένα καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών θα αναφέρεται ως μιγαδικό επίπεδο. Ο άξονας x'x λέγεται άξονας των πραγματικών αριθμών, ενώ ο άξονας y'y λέγεται άξονας των φανταστικών αριθμών.

Ένας μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$ παριστάνεται επίσης και με τη διανυσματική ακτίνα, $\overrightarrow{OM}$, του σημείου $M(\alpha, \beta)$.



1.2 Πράξεις Μιγαδικών

Έστω οι μιγαδικοί $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i$. Για να κάνουμε μια πράξη με δύο μιγαδικούς, αντιμετωπίζουμε τον κάθε μιγαδικό ως ένα άθροισμα και ένα γινόμενο. Οπότε κάνουμε κανονικά τις πράξεις όπως στους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή επιμεριστικές, προσεταιριστικές, αντιμεταθετικές κτλ.

- Πρόσθεση:

$$z_1 + z_2 = \alpha + \beta i + \gamma + \delta i = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i$$

- Αφαίρεση:

$$z_1 - z_2 = \alpha + \beta i - (\gamma + \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$$

- Πολλαπλασιασμός:

$$z_1 \cdot z_2 = (\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)i$$

- Διαίρεση:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{(\alpha + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 + \delta^2}i$$

- Ύψωση στο τετράγωνο:

$$z_1^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$$

- Ύψωση εις την τρίτη:

$$z_1^3 = (\alpha + \beta i)^3 = \alpha^3 - 3\alpha\beta^2 + (3\alpha^2\beta - \beta^3)i$$

Προσοχή! Καλό είναι να μην ξεχνάμε:

$$(1 + i)^2 = 1 - 1 + 2i = 2i$$

$$(1 - i)^2 = 1 - 1 - 2i = -2i$$

Τετραγωνική ρίζα

Όταν θέλουμε να βρούμε τη τετραγωνική ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού $\alpha + \beta i \neq 0$, θα βρούμε ένα μιγαδικό $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$z^2 = \alpha + \beta i \Leftrightarrow (x + yi)^2 = \alpha + \beta i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = \alpha + \beta i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

Από τη λύση του συστήματος θα βρίσκουμε γενικά δύο λύσεις $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ οπότε ο μιγαδικός αριθμός $\alpha + \beta i$ θα έχει δύο διακεκριμένες τετραγωνικές ρίζες, τους μιγαδικούς $z_1 = x_1 + y_1 i$ και $z_2 = x_2 + y_2 i$.

Μεθοδολογίες

i. Όταν έχουμε σχέση με μιγαδικούς της μορφής $z = \alpha + \beta i$ και $w = \beta - \alpha i$, θα βγάζουμε από τον z κοινό παράγοντα το i. Έτσι θα εμφανίζεται ο w, δηλαδή

$$z = \alpha + \beta i = -\alpha i^2 + \beta i = i(\beta - \alpha i) = iw$$

ii. Όταν έχουμε σχέση με μιγαδικούς της μορφής $z = \alpha - \beta i$ και $w = \beta + \alpha i$, θα βγάζουμε από τον z κοινό παράγοντα το $-i$. Έτσι θα εμφανίζεται ο w, δηλαδή

$$z = \alpha - \beta i = -\alpha i^2 - \beta i = -i(\beta + \alpha i) = -iw$$

Ορισμός

Συζυγής μιγαδικός είναι ο μιγαδικός που έχει το ίδιο πραγματικό μέρος και αντίθετο φανταστικό.

Αν $z = \alpha + \beta i$ τότε $\overline{z} = \alpha - \beta i$, δηλ. $\begin{cases} Re(z) = Re(\overline{z}) \\ Im(z) = -Im(\overline{z}) \end{cases}$.

Ιδιότητες του συζυγή μιγαδικού

- $z_1 = z_2 = \ldots = z_\nu \Leftrightarrow \overline{z_1} = \overline{z_2} = \ldots = \overline{z_\nu}$
- $\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_\nu}$
- $\overline{z_1 - z_2 - \ldots - z_\nu} = \overline{z_1} - \overline{z_2} - \ldots - \overline{z_\nu}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_\nu} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \ldots \cdot \overline{z_\nu}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- $\overline{(z^\nu)} = (\overline{z})^\nu$
- $z \cdot \overline{z} = \alpha^2 + \beta^2 = Re^2(z) + Im^2(z)$
- $z + \overline{z} = 2\alpha = 2\,Re(z)$
- $z - \overline{z} = 2\beta i = 2\,Im(z)i$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$
- $z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Δυνάμεις του i

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε μια δύναμη του i, διαιρούμε τον εκθέτη με το 4, βρίσκουμε το πηλίκο (π) και το υπόλοιπο (υ) και υπολογίζουμε το i^υ. Δηλαδή,

$$i^\nu = i^{4\pi+\upsilon} = i^{4\pi} i^\upsilon = i^\upsilon = \begin{cases} 1, \upsilon = 0 \\ i, \upsilon = 1 \\ -1, \upsilon = 2 \\ -i, \upsilon = 3 \end{cases}$$

Αλλιώς μπορούμε να το γράψουμε,

$$i^\nu = \begin{cases} 1, \nu = 4\kappa \\ i, \nu = 4\kappa + 1 \\ -1, \nu = 4\kappa + 2 \\ -i, \nu = 4\kappa + 3 \end{cases}$$

Δευτεροβάθμια εξίσωση

Η γενική μορφή της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές είναι

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0 \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}^* \text{ και } \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$. Οπότε:

- Αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση θα έχει δύο πραγματικές ρίζες $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
- Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση θα έχει μία διπλή πραγματική ρίζα $z = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.
- Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση θα έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{|\Delta|}i}{2\alpha}$.

Προσοχή! Και σε αυτήν την περίπτωση ισχύουν οι τύποι του Vietta.

$$S = z_1 + z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1) = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$P = z_1 \cdot z_2 = |z_1^2| = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Όταν έχουμε μια εξίσωση της μορφής $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ και $\alpha \neq 0$ με διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \kappa^2$ τότε θα έχει δύο λύσεις $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \kappa}{2\alpha}$.

Θεώρημα

Μια πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν στο σύνολο $\mathbb{C}$ θα έχει ν ακριβώς ρίζες.

Θεώρημα

Αν μια πολυωνυμική εξίσωση στο σύνολο $\mathbb{C}$ έχει μια μιγαδική ρίζα, τότε θα είναι ρίζα και ο συζυγής μιγαδικός.

Μιγαδικές εξισώσεις

i. Αν έχουμε μόνο έναν άγνωστο μιγαδικό z, τότε θα λύνουμε την εξίσωση ως προς z κάνοντας πράξεις.
ii. Αν έχουμε παραπάνω από έναν άγνωστους μιγαδικούς (π.χ. $z, \overline{z}$) τότε θέτουμε $z = x + yi$ και εκμεταλλευόμαστε την ισότητα των μιγαδικών που προκύπτει. Οπότε θα προκύπτει ένα σύστημα ως προς x, y το οποίο και θα λύνουμε.
iii. Όταν έχουμε μια εξίσωση της μορφής $f(z) = 0$ και μας δοθεί μια ρίζα της ή μπορέσουμε να βρούμε μια ρίζα της τότε θα γνωρίζουμε ένα παράγοντα του πολυωνύμου $f(z)$ οπότε θα αναγόμαστε σε εξίσωση μικρότερου βαθμού εκτελώντας διαίρεση ή χρησιμοποιώντας σχήμα Horner ή χρησιμοποιώντας τον ορισμό των ίσων πολυωνύμων. Γενικότερα όταν έχουμε μια εξίσωση της μορφής

$f(z) = 0$ θα αναλύουμε το πολυώνυμο $f(z)$ σε γινόμενο παραγόντων και θα αναγόμαστε σε εξισώσεις μικρότερου βαθμού.

Μιγαδικές ανισώσεις

Στο σύνολο $\mathbb{C}$ δεν έχει νόημα η διάταξη.

Επομένως αν έχουμε ανίσωση με μιγαδικούς, θα τους αντικαθιστούμε, θα θέτουμε τα φανταστικά μέρη των μιγαδικών ίσα με μηδέν και θα παίρνουμε την ανίσωση μόνο για τα πραγματικά μέρη των μιγαδικών.

Προσοχή! Δεν μετακινούμε ποτέ όρους από το ένα μέρος της ανίσωσης στο άλλο, όσο δουλεύουμε στο σύνολο $\mathbb{C}$.

Μεθοδολογίες στους γεωμετρικούς τόπους

- Όταν μας ζητούν γεωμετρικό τόπο και μας δίνουν μια παράσταση, που ανήκει στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{I}$ τότε:

i. Αν η παράσταση περιέχει ένα μόνο μιγαδικό z, συνήθως θα θέτουμε $z = x + yi$ και θα κάνουμε πράξεις προσπαθώντας να τη φέρουμε στη μορφή $\alpha + \beta i$. Έπειτα θα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$$

$$z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$$

ii. Αν όμως η παράσταση περιέχει παραπάνω από έναν μιγαδικό (π.χ. z, w) τότε θα εφαρμόζουμε την ιδιότητα

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

$$z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$$

- Γενικότερα, αν $z = x + yi$ είναι ένας μιγαδικός και θέλουμε να βρούμε τη γραμμή στην οποία κινείται η εικόνα του $M(x, y)$ ώστε ο αριθμός $w = f(z)$ να έχει κάποια ιδιότητα τότε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα αυτή θα κάνουμε πράξεις και στη συνέχεια θα αντικαθιστούμε το z με $x + yi$ οπότε θα βρίσκουμε σχέσεις μεταξύ των x, y οι οποίες θα καθορίζουν τη γραμμή. Αν θέλουμε μπορούμε πρώτα να αντικαθιστούμε το z με το $x + yi$ και ύστερα να κάνουμε πράξεις.
- Αν $z = x + yi$ είναι ένας μιγαδικός ο οποίος εκφράζεται συναρτήσει μιας παραμέτρου λ, δηλαδή ισχύει $z = f(\lambda) + g(\lambda)i$ και θέλουμε να βρούμε τη γραμμή στην οποία κινείται η εικόνα του $M(x, y)$ τότε θα βρίσκουμε μια σχέση που να συνδέει τα x, y χωρίς να περιέχει τη παράμετρο λ. Η σχέση αυτή θα μας καθορίζει τη γραμμή στην οποία κινείται το Μ. Για να βρούμε τη σχέση που συνδέει τα x, y κάνουμε απαλοιφή του λ από τις εξισώσεις $x = f(\lambda)$, $y = g(\lambda)$.

Ειδικότερα αν η παράμετρος λ είναι γωνία η απαλοιφή γίνεται χρησιμοποιώντας γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες όπως είναι οι $\eta\mu^2\lambda + \sigma\upsilon\nu^2\lambda = 1$, $1 + \varepsilon\varphi^2\lambda = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\lambda}$ και άλλες.

- Αν οι μιγαδικοί $w = x + yi$ και $z = \kappa + \lambda i$ συνδέονται με κάποια σχέση και γνωρίζουμε τη γραμμή c στην οποία κινείται η εικόνα $P(\kappa, \lambda)$ του μιγαδικού z τότε για να βρούμε τη γραμμή στην οποία κινείται η εικόνα $M(x, y)$ του μιγαδικού w θα βρίσκουμε τα κ, λ συναρτήσει των x, y. Στη συνέχεια θα αντικαθιστούμε τα κ, λ στην εξίσωση της γραμμής c και θα βρίσκουμε μια σχέση μεταξύ των x, y η οποία θα μας καθορίζει τη γραμμή στην οποία κινείται το σημείο M.

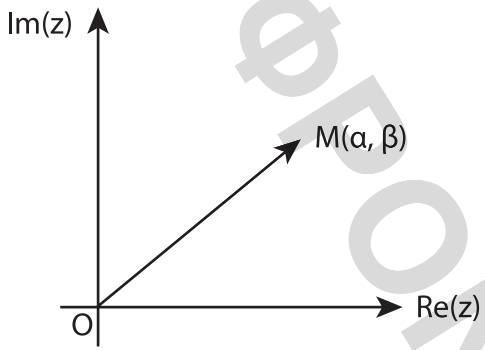
Προσοχή! Δεν ξεχνάμε ποτέ να πάρουμε περιορισμούς όταν η παράσταση είναι κλασματική και να ελέγξουμε αν τα σημεία αυτά ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο που βρήκαμε για να τα απορρίψουμε.

1.3 Μέτρο Μιγαδικού

Ορισμός

Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$. Ονομάζουμε μέτρο του μιγαδικού την απόσταση της εικόνας του $M(\alpha, \beta)$ από την αρχή των αξόνων.

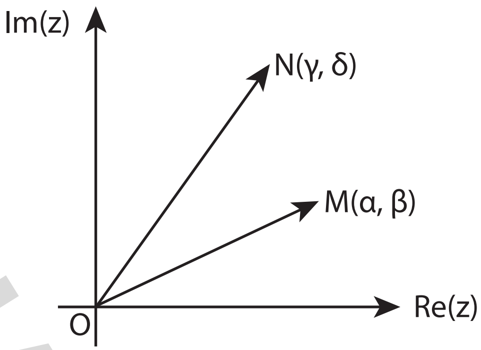
$$(OM) = |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$



Ορισμός

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$. Η απόσταση των εικόνων τους $M(\alpha, \beta)$ και $N(\gamma, \delta)$ θα δίνεται από το μέτρο της διαφοράς τους, δηλαδή

$$(MN) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2}$$



Μεθοδολογίες

i. Όταν μας ζητάνε την απόσταση της εικόνας ενός μιγαδικού z (ή την απόσταση του μιγαδικού) από την αρχή των αξόνων, θα υπολογίζουμε το μέτρο του μιγαδικού z, $|z|$.

ii. Όταν μας ζητάνε την απόσταση των εικόνων δύο μιγαδικών z_1, z_2 (ή την απόσταση των δύο μιγαδικών), θα υπολογίζουμε το μέτρο της διαφοράς των δύο μιγαδικών z_1, z_2, $|z_1 - z_2|$.

iii. Οι εικόνες δύο μιγαδικών και η αρχή των αξόνων ή οι εικόνες τριών μιγαδικών σχηματίζουν τρίγωνο. Για να βρούμε το είδος του πρέπει να υπολογίσουμε το μήκος των πλευρών του τριγώνου. Αυτό το πετυχαίνουμε με βάση τις προηγούμενες δύο μεθοδολογίες υπολογίζοντας τα μέτρα των μιγαδικών ή τα μέτρα των διαφορών τους.
   - Αν και τα τρία μέτρα είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.
   - Αν τα δύο από τα τρία μέτρα είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
   - Αν ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
   - Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις το τρίγωνο είναι σκαληνό.

Ιδιότητες του μέτρου

- $|\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}| = |z|$
- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|z_1 z_2 \ldots z_\nu| = |z_1||z_2|\ldots|z_\nu|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z^\nu| = |z|^\nu$
- Τριγωνική Ανισότητα

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

- $|z^2| = z^2 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

- $|z^2| = -z^2 \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$

Προσοχή! Ισότητα δύο μιγαδικών συνεπάγεται ισότητα μέτρων, ενώ ισότητα μέτρων δεν συνεπάγεται ισότητα μιγαδικών.

$z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$ ενώ $|z_1| = |z_2| \not\Rightarrow z_1 = z_2$

Όταν έχουμε ισότητα μέτρων υψώνουμε στο τετράγωνο για να φύγουν τα μέτρα, δηλαδή

$|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2}$

Προσοχή! $z^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$ ενώ $|z|^2 = \alpha^2 + \beta^2$

Μεθοδολογίες

i. Αν έχουμε μεγάλες δυνάμεις συνήθως παίρνουμε μέτρα για να μπορέσουμε να τι διώξουμε.

$$z_1^\nu = z_2^\nu \Rightarrow |z_1^\nu| = |z_2^\nu| \Leftrightarrow |z_1|^\nu = |z_2|^\nu \Leftrightarrow$$
$$|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2}$$

ii. Αν γνωρίζουμε το μέτρο μιας παράστασης που περιέχει μιγαδικούς και μας ζητάνε να βρούμε το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο μιας άλλης παράστασης θα γράφουμε την παράσταση ως άθροισμα ή διαφορά δύο μιγαδικών ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος (συνήθως προσπαθούμε να εμφανίσουμε την παράσταση της οποίας γνωρίζουμε το μέτρο) και θα εφαρμόζουμε τριγωνική ανισότητα. Επίσης μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τα προβλήματα αυτά χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών στο επίπεδο.

iii. Όταν έχουμε μια εξίσωση της μορφής $f(z, \bar{z}, |z|) = 0$ μέχρι δευτέρου βαθμού θα θέτουμε $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ οπότε θα προκύπτει ένα σύστημα ως προς x, y το οποίο και θα λύνουμε.

iv. Όταν έχουμε μια εξίσωση της μορφής $f(z, \bar{z}, |z|) = 0$ και δεν μπορούμε να τη λύσουμε με τη προηγούμενη μεθοδολογία, θα προσπαθήσουμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα για το $|z|$ και στη συνέχεια θα αναγόμαστε σε γνωστή μορφή.

v. Όταν σε μια άσκηση μας δίνεται μια σχέση της μορφής $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ μπορούμε να κάνουμε τα εξής:

α. $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = 0$.

β. $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3) = 0$.

γ.

$$z_1 + z_2 = -z_3 \Rightarrow |z_1 + z_2| = |-z_3| \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = |z_3|^3 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_3\overline{z_3} \Leftrightarrow$$

$$z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} = z_3\overline{z_3} \Leftrightarrow$$

$$2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_3|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2$$

δ.

$$z_1 + z_2 = -z_3 \Rightarrow (z_1 + z_2)^2 = (-z_3)^2 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = z_3^2 \Leftrightarrow$$

$$2z_1z_2 = z_3^2 - z_1^2 - z_2^2$$

1.4 Βασικοί Γεωμετρικοί Τόποι

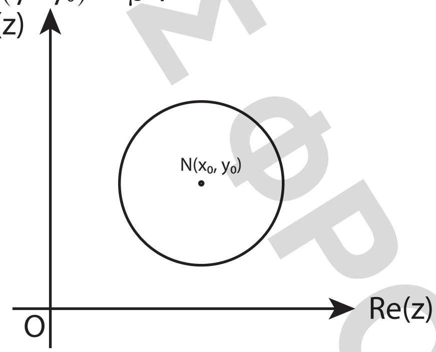
Κύκλος

Κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν από ένα σταθερό σημείο (κέντρο) σταθερή απόσταση (ακτίνα).

Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του τυχαίου μιγαδικού $z = x + yi$, $N(x_0, y_0)$ η εικόνα του σταθερού μιγαδικού $z_0 = x_0 + y_0 i$ και $\rho, \rho_1, \rho_2 > 0$ με $\rho_1 < \rho_2$.

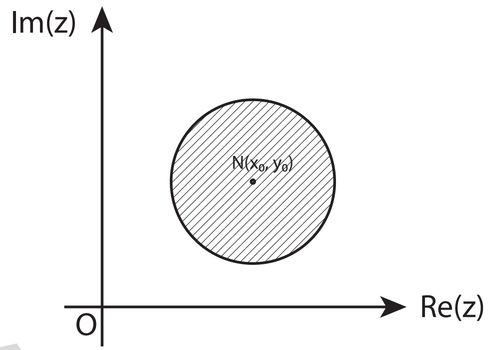
- $|z - z_0| = \rho$

Εκφράζει κύκλο με κέντρο την εικόνα του z_0, Ν και ακτίνα ρ. Η εξίσωση είναι $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.



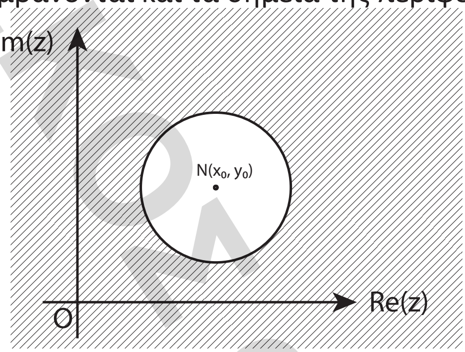
- $|z - z_0| < \rho$

Εκφράζει κυκλικό δίσκο. Είναι δηλαδή, όλα τα εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο την εικόνα του z_0, Ν και ακτίνα ρ. Η εξίσωση είναι $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \rho^2$. Αν έχουμε $\leqslant$ τότε συμπεριλαμβάνονται και τα σημεία της περιφέρειας του κύκλου.



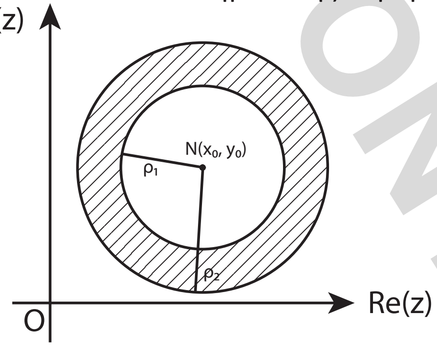
- $|z - z_0| > \rho$

Εκφράζει όλα τα σημεία εκτός του κύκλου με κέντρο την εικόνα του z_0, Ν και ακτίνα ρ. Η εξίσωση είναι $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > \rho^2$. Αν έχουμε $\geqslant$ τότε συμπεριλαμβάνονται και τα σημεία της περιφέρειας του κύκλου.



- $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$

Εκφράζει κυκλικό δακτύλιο. Είναι δηλαδή, όλα τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ των ομόκεντρων κύκλων με κέντρο την εικόνα του z_0 και ακτίνες ρ_1 και ρ_2. Η εξίσωση είναι $\rho_1^2 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \rho_2^2$. Αν έχουμε $\leqslant$ τότε συμπεριλαμβάνονται και τα σημεία της περιφέρειας του κύκλου.



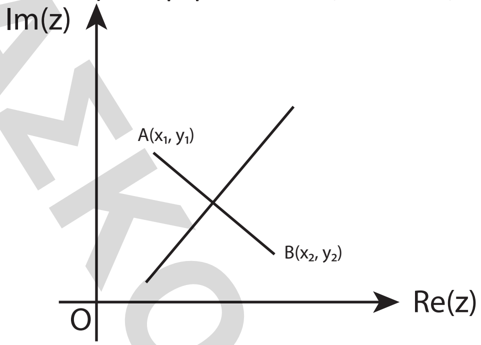
Μεσοκάθετος

Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δύο σταθερά σημεία.

Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του τυχαίου μιγαδικού $z = x + yi$, $A(x_1, y_1)$ η εικόνα του σταθερού μιγαδικού $z_1 = x_1 + y_1 i$ και $B(x_2, y_2)$ η εικόνα του σταθερού μιγαδικού $z_2 = x_2 + y_2 i$.

- $|z - z_1| = |z - z_2|$

Εκφράζει τα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος που έχει άκρα τις εικόνες των μιγαδικών z_1, A και z_2, B.



Για να βρούμε την εξίσωση δουλεύουμε ως εξής:

Υπολογίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της AB και μετά υπολογίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της μεσοκαθέτου. Βρίσκουμε το μέσο της AB και γράφουμε την εξίσωση της ευθείας.

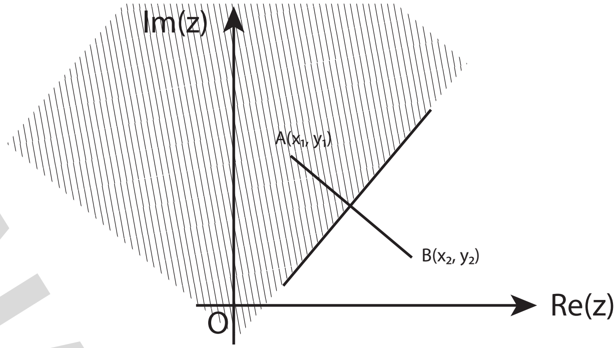
$\lambda_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $\lambda_\mu \cdot \lambda_{AB} = -1$, $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

$\mu: y - y_M = \lambda_\mu (x - x_M)$

Βέβαια μπορούμε, αντί να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω γεωμετρική διαδικασία, να υψώσουμε απευθείας τη σχέση στο τετράγωνο, να αντικαταστήσουμε τους μιγαδικούς και να κάνουμε πράξεις.

- $|z - z_1| < |z - z_2|$

Εκφράζει τα σημεία του ημιεπιπέδου που ορίζεται από την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος που έχει άκρα τις εικόνες των μιγαδικών z_1, A και z_2, B και την εικόνα του z_1, A. Αν έχουμε $\leqslant$ συμπεριλαμβάνονται και τα σημεία της μεσοκαθέτου.

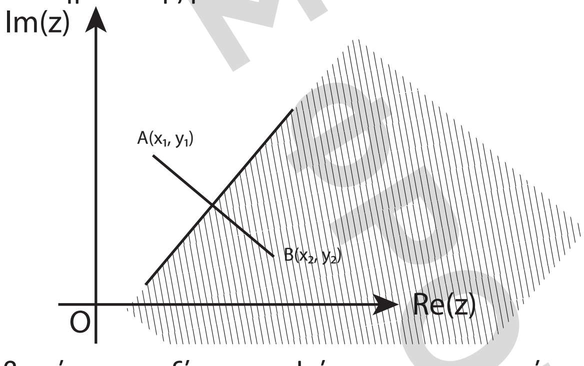


Για να βρούμε την εξίσωση υψώνουμε στο τετράγωνο τη σχέση με τα μέτρα των μιγαδικών, αντικαθιστούμε τους μιγαδικούς και κάνουμε πράξεις.

Προσοχή! Δεν μετακινούμε όρους από το ένα μέρος της ανίσωσης στο άλλο όσο έχουμε z ή i στην παράσταση.

- $|z - z_1| > |z - z_2|$

Εκφράζει τα σημεία του ημιεπιπέδου που ορίζεται από την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος που έχει άκρα τις εικόνες των μιγαδικών z_1, Α και z_2, Β και την εικόνα του z_2, Β. Αν έχουμε $\geqslant$ συμπεριλαμβάνονται και τα σημεία της μεσοκαθέτου.



Για να βρούμε την εξίσωση υψώνουμε στο τετράγωνο τη σχέση με τα μέτρα των μιγαδικών, αντικαθιστούμε τους μιγαδικούς και κάνουμε πράξεις.

Προσοχή! Δεν μετακινούμε όρους από το ένα μέρος της ανίσωσης στο άλλο όσο έχουμε z ή i στην παράσταση.

Παραβολή

Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο και μια σταθερή ευθεία. Το σταθερό σημείο είναι η εστία και η σταθερή ευθεία είναι η διευθετούσα.

Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του τυχαίου μιγαδικού $z = x + yi$ και $p \in \mathbb{R}^*$.

- $|z - \bar{z}|^2 = 4p(z + \bar{z})$

  Εκφράζει παραβολή με εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα $x = -\frac{p}{2}$.

Έλλειψη

Έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που το άθροισμα των αποστάσεων τους από δύο σταθερά σημεία (εστίες) είναι σταθερό (και ίσο με 2α, το μήκος του μεγάλου άξονα).

Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του τυχαίου μιγαδικού $z = x + yi$, $A(x_1, y_1)$ η εικόνα του σταθερού μιγαδικού $z_1 = x_1 + y_1 i$, $B(x_2, y_2)$ η εικόνα του σταθερού μιγαδικού $z_2 = x_2 + y_2 i$ και $c > 0$.

- $|z - z_1| + |z - z_2| = c$, με $|z_1 - z_2| < c$

  Εκφράζει έλλειψη με εστίες τις εικόνες των z_1, A και z_2, B και $\alpha = \frac{c}{2}$. Ο τύπος είναι $\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\beta^2} = 1$, με (x_0, y_0) το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB.

Υπερβολή

Υπερβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία (εστίες) είναι σταθερή (και ίση με 2α).

Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του τυχαίου μιγαδικού $z = x + yi$, $A(x_1, y_1)$ η εικόνα του σταθερού μιγαδικού $z_1 = x_1 + y_1 i$, $B(x_2, y_2)$ η εικόνα του σταθερού μιγαδικού $z_2 = x_2 + y_2 i$ και $c > 0$.

- $\left||z - z_1| - |z - z_2|\right| = c$, με $|z_1 - z_2| > c$

  Εκφράζει υπερβολή με εστίες τις εικόνες των z_1, A και z_2, B και $\alpha = \frac{c}{2}$. Ο τύπος είναι $\left|\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} - \frac{(y - y_0)^2}{\beta^2}\right| = 1$, με (x_0, y_0) το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB.

Μεθοδολογίες στους γεωμετρικούς τόπους

i. Αν ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων ενός μιγαδικού z είναι η ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$, τότε το ελάχιστο μέτρο του z θα το βρίσκουμε παίρνοντας την απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία ε, χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$d(O,\varepsilon) = \frac{|A0 + B0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ii. Αν θέλουμε το μιγαδικό z_0 που έχει το ελάχιστο μέτρο, θα λύνουμε το σύστημα της ευθείας ε και της κάθετης σε αυτή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η λύση του συστήματος θα είναι η εικόνα του μιγαδικού z_0.

$$\varepsilon: y = \lambda_1 x + \beta,\ \lambda_1 \lambda_\eta = -1,\ \eta: y = \lambda_\eta x,\ \begin{cases} y_0 = \lambda_1 x_0 + \beta \\ y_0 = \lambda_\eta x_0 \end{cases}$$

iii. Αν ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων ενός μιγαδικού είναι κύκλος c με κέντρο Κ και ακτίνα ρ, τότε το ελάχιστο μέτρο του z, θα είναι $|(OK) - \rho|$ και το μέγιστο μέτρο του z, θα είναι $(OK) + \rho$, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

iv. Αν θέλουμε του μιγαδικούς z_1, z_2 που έχουν το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο αντίστοιχα, θα φέρουμε την ευθεία που ενώνει την αρχή των αξόνων Ο και το κέντρο του κύκλου Κ και θα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων του κύκλου c και της ευθείας ΟΚ. Η λύση του συστήματος θα είναι οι εικόνες των z_1, z_2.

$$c: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2,\ \lambda_{OK} = \frac{y_K}{x_K},\ OK: y = \lambda_{OK} x$$

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \\ y = \lambda_{OK} x \end{cases} \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (\lambda_{OK} x - y_0)^2 = \rho^2$$

v. Όταν έχουμε δύο μιγαδικούς z, w με γεωμετρικούς τόπους ευθεία ε και κύκλο c αντίστοιχα και θέλουμε να βρούμε την ελάχιστη απόσταση τους ή την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$ τότε θα βρίσκουμε την απόσταση του κέντρου του κύκλου c από την ευθεία ε.
   α. Αν η απόσταση d είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα ρ τότε το ελάχιστο μέτρο θα είναι $\min|z - w| = d - \rho$.
   β. Αν η απόσταση d είναι μικρότερη ή ίση από την ακτίνα ρ τότε το ελάχιστο μέτρο θα είναι 0 δηλαδή $\min|z - w| = 0$.

vi. Όταν έχουμε δύο μιγαδικούς z, w με γεωμετρικούς τόπους τους κύκλους $c_1: (K_1, \rho_1)$ και $c_2: (K_2, \rho_2)$ αντίστοιχα και θέλουμε να βρούμε την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση τους ή την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$ τότε θα βρίσκουμε την απόσταση των κέντρων των κύκλων (K_1K_2) (διάκεντρος).
   α. Αν ισχύει $(K_1K_2) > \rho_1 + \rho_2$ τότε το ελάχιστο μέτρο θα είναι $\min|z - w| = (K_1K_2) - \rho_1 - \rho_2$ και το μέγιστο μέτρο θα είναι $\max|z - w| = (K_1K_2) + \rho_1 + \rho_2$.
   β. Αν ισχύει $|\rho_1 - \rho_2| \leqslant (K_1K_2) \leqslant \rho_1 + \rho_2$ τότε το ελάχιστο μέτρο θα είναι $\min|z - w| = 0$ και το μέγιστο μέτρο θα είναι $\max|z - w| = (K_1K_2) + \rho_1 + \rho_2$.
   γ. Αν ισχύει $(K_1K_2) < |\rho_1 - \rho_2|$ τότε το ελάχιστο μέτρο θα είναι $\min|z - w| = |(K_1K_2) - |\rho_1 - \rho_2||$ και το μέγιστο μέτρο θα είναι $\max|z - w| = (K_1K_2) + \rho_1 + \rho_2$.

vii. Σε οποιεσδήποτε άλλες περιπτώσεις που γνωρίζουμε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z, w και θέλουμε να βρούμε την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση τους ή την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$ θα χρησιμοποιούμε τη γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών στο επίπεδο για να βγάλουμε συμπεράσματα.

1.5 Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Να ορίσετε το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.
2. Πότε δύο μιγαδικοί z_1 και z_2 θα λέμε ότι είναι ίσοι;
3. Πότε δύο μιγαδικοί z_1 και z_2 θα λέμε ότι είναι συζυγείς;
4. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών z_1 και z_2 είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.
5. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς δύο μιγαδικών z_1 και z_2 είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.
6. Για τους μιγαδικούς z_1, z_2, να αποδείξετε ότι $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
7. Να υπολογίσετε τις δυνατές τιμές του i^ν με $\nu \in \mathbb{N}$.
8. Να λύσετε στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.
9. Να αποδείξετε το παρακάτω Θεώρημα:
   Αν ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές, τότε και ο συζυγής μιγαδικός $\overline{z_0} = \alpha - \beta i$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.
10. Για τους μιγαδικούς z_1, z_2, να αποδείξετε ότι $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
11. Να αποδείξετε ότι $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, όπου z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί και ότι το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

1.6 Ερωτήσεις τύπου Σωστό - Λάθος

1. Ο αντίστροφος του i είναι το -i.
2. Ο συζυγής ενός πραγματικού αριθμού είναι ο ίδιος ο πραγματικός αριθμός.
3. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει $z_1^2 = z_2^2 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ ή $z_1 = -z_2$.
4. Αν το τετράγωνο ενός μιγαδικού z είναι αρνητικός αριθμός, τότε ο z είναι φανταστικός.
5. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $z^3 = 1$ τότε θα είναι $z = 1$.
6. Για τις διάφορες τιμές του $\nu \in \mathbb{N}^*$, το άθροισμα $S_\nu = i + i^2 + \ldots + i^\nu$ παίρνει τέσσερις τιμές.

7. Οι εικόνες των μιγαδικών z και $-\overline{z}$ είναι συζυγείς ως προς την ευθεία $y=-x$.
8. Κάθε πολυώνυμο 3ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.
9. Η εξίσωση $|z|=1$ εκφράζει ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.
10. Αν z_1 και z_2 είναι τυχαίοι μιγαδικοί, τότε ισχύει $|z_1-z_2|\leqslant||z_1|-|z_2||$.
11. $|z^2|=z^2$.
12. Αν $|z|=1$ τότε οι εικόνες των iz είναι ομοκυκλικά σημεία.

1.7 Ασκήσεις για λύση

1. Να υπολογιστούν οι αριθμοί $x,y\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύουν:
   α. $x^2-3x+y+3+(x+2y)i=0$.
   β. $\sigma\upsilon\nu x-1+x^2 i=y+yi$.
   γ. $\ln x+e^y i=2+i$.
   δ. $\dfrac{i}{1+xi}=\dfrac{1}{2}+\eta\mu y i$.
   ε. $\sqrt{x^2-3x+3}+yi=y+(x-1)i$.
2. Να υπολογιστούν οι αριθμοί $x,y\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύουν:
   α. $(x+y)^2+xi+6=5x+y(5+i)+i$.
   β. $x^2+3yi=6+7i-xy-2xi$.
   γ. $\dfrac{x}{1-2i}+\dfrac{y}{2-3i}=\dfrac{6+7i}{1-8i}$.
   δ. $(i-x)^2-(i+x)^2+y+1=\dfrac{1}{i}$.
   ε. $\dfrac{1}{x+i}=x+yi$.
3. Έστω ο πραγματικός αριθμός x και ο μιγαδικός $z=\sqrt{2}+i2\eta\mu x$. Για ποιες τιμές του x ισχύει $z=\sqrt{2}+i$.
4. Αν $z=(5+4i)(\lambda-\mu)+(4+5i)(5\lambda+6\mu)$ να υπολογίσετε τα $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι
   α. $z=0$.
   β. $z=7+20i$.
5. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε ο μιγαδικός $w=\dfrac{\alpha+2+\alpha i}{1+\alpha i}$ να είναι φανταστικός.
6. Δίνεται ο μιγαδικός $z=(\lambda^2-1)+(\lambda^2-3\lambda+2)i$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τιμές του λ για τις οποίες ο αριθμός z είναι:
   α. πραγματικός β. φανταστικός γ. μηδέν

7. Δίνεται ο μιγαδικός $z=\dfrac{\lambda-i}{2\lambda+(\lambda+1)i}$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τιμές του λ για τις οποίες ο αριθμός z είναι:
α. πραγματικός β. φανταστικός

8. Να βρείτε το συζυγή του μιγαδικού $z=\dfrac{2-3i}{1+2i}+\dfrac{3+4i}{1-2i}$.

9. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=\ln(x^2-3x-3)+xi$ και $z_2=y^2 i$. Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y ώστε οι δύο μιγαδικοί να είναι συζυγείς.

10. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=-3+(2x-y)i$ και $z_2=x-5y-3i$. Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y ώστε οι δύο μιγαδικοί να είναι συζυγείς.

11. Αν $z=\dfrac{1}{1-i}+\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{i}{2}$, να δειχθεί ότι $z^2-2z+\dfrac{5}{4}=0$.

12. Να δειχθεί ότι ο μιγαδικός $z=\dfrac{(1+i)^8+(1-i)^{16}}{(1-i)^2-(1+i)^2}$ είναι φανταστικός.

13. Να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού $z=\left(\dfrac{2+3i}{3-2i}\right)^{40}+\left(\dfrac{1+2i}{2-i}\right)^{23}$.

14. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+81=0$ ικανοποιείται από τον μιγαδικό $z=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(i-1)$.

15. Αν $z=\dfrac{2i}{i-3}$ να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(z^2)=-\dfrac{8}{25}$.

16. Αν $z=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{24}$ να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(z)=1$.

17. Αν $z=\dfrac{1+i}{2-i}$ να βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $w=z+\dfrac{1}{z}$.

18. Αν $z=2+3i$ να παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο οι μιγαδικοί $z, -z, \bar{z}, -\bar{z}$. Τι παρατηρείτε;

19. Αν $z\in\mathbb{C}$ και $z^2+z+1=0$ να αποδείξετε ότι:
α. $z^3=1$.
β. $z^{2007}+\dfrac{1}{z^{2007}}=2$.
γ. $z^{3\nu+2}+z^{6\nu+1}+1=0$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

20. Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu)=i^\nu z$ με $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι $f(3)+f(8)+f(13)+f(18)=0$.

21. Για κάθε μιγαδικό z θεωρούμε τον μιγαδικό $f(z)=i(z^2+1)+z$.
α. Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(i)$ και $f(-i)$.
β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(f(i))^\nu+(f(-i))^{-\nu}$.

22. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

α. $A = i^{10} + \frac{1}{i^{15}} + i^{20} + \frac{1}{i^{25}}$.

β. $B = 5i^2 + 7i^{18} - 4i^{31} + 7i - 3i^{44} + 15$.

γ. $\Gamma = i^{57} + i^{58} + i^{59} + \ldots + i^{213}$.

δ. $\Delta = i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{2006}$.

ε. $E = i^{3v+1} + i^{2v} + i^{5v+3}, v \in \mathbb{N}$.

στ. $Z = (1 + i^v)(1 + i^{2v})$.

ζ. $H = [[[(1 + i)^2 - i]^4 + i]^2 - i]^4$.

η. $\Theta = (1 + i)^3 + (1 - i)^3$.

23. Να δειχθεί ότι

$$i^{2v} + i^{2v+1} + i^{2v+2} + i^{2v+3} = \frac{1}{i^{2v}} + \frac{1}{i^{2v+1}} + \frac{1}{i^{2v+2}} + \frac{1}{i^{2v+3}}.$$

24. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$i + i^2 + i^3 + \ldots + i^\kappa$ όπου κ πολλαπλάσιο του 4.

25. Αν το $S = 1 - i + i^2 - i^3 + \ldots + (-1)^v i^v$ είναι φανταστικός, να βρεθούν οι τιμές του $v \in \mathbb{N}^*$.

26. Να βρείτε το άθροισμα:

$$S = i + (2 + 3i) + (4 + 5i) + \ldots + [(2\nu - 2) + (2\nu - 1)i].$$

27. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $v \in \mathbb{N}^*$ αν ισχύει ότι $(\alpha i + \beta)^v + (\alpha - \beta i)^v = 0$, όπου $\alpha - \beta i \neq 0$.

28. Να δείξετε ότι ο αριθμός $z = \frac{(2 + 3i)^2}{2 - 3i} + \frac{(2 - 3i)^2}{2 + 3i}$ είναι πραγματικός.

29. Να αποδειχθεί ότι $\left(\frac{3 + 2i}{2 - 3i}\right)^{4v} + \left(\frac{1 - 2i}{2 + i}\right)^{4\mu} = 2, v, \mu \in \mathbb{N}$.

30. Αν λ, κ άρτιοι να αποδειχθεί ότι $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^{2002\kappa} - \left(\frac{5 - 2i}{2 + 5i}\right)^{2004\lambda} = 0$.

31. Αν $v \in \mathbb{N}^*$ και ο μιγαδικός $z = (3 + 2i)^{2v} + (2 + 3i)^{2v} \in \mathbb{I}$, να δειχθεί ότι ο v είναι περιττός.

32. Να δειχθεί ότι ο $z = (1 + 5i)^{132} + (-5 - i)^{132} \in \mathbb{R}$.

33. Αν ισχύει η σχέση $x + yi = (\sqrt{3} + \sqrt{2}i)^\nu$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$ να δείξετε ότι $x^2 + y^2 = 5^\nu$.

34. Έστω $z = \left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^{3\nu}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να δειχθεί ότι $|Re(z) + Im(z)| = 1$.

35. Να αποδειχθεί ότι:

α. $Re\left(\frac{z^\nu - 1}{z^\nu + 1}\right) = 0 \Leftrightarrow Re\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right) = 0$.

β. $Im\left(\frac{z^\nu i + 1}{z^\nu + i}\right) = 0 \Leftrightarrow Im\left(\frac{zi + 1}{z + i}\right) = 0$.

36. Να λυθούν οι εξισώσεις.

α. $2z - 2i = \dfrac{z}{3i} - \dfrac{i+1}{2}$.

β. $\dfrac{z-i}{2+i} - 3 = \dfrac{z+i}{2-i}$.

γ. $\dfrac{z}{i} - \dfrac{z+1}{2} + \dfrac{z-i}{3} = 0$.

δ. $(1+i)z = \overline{2+zi}$.

ε. $4 + zi = (1+2i)\overline{z}$.

37. Να βρείτε τη τετραγωνική ρίζα των μιγαδικών:

α. $z = (-1+i)^3 - 2i^3$.

β. $z = -5 - 12i$.

38. Να λυθούν οι εξισώσεις.

α. $z^2 = 3 + 4i$.

β. $z^2 - 2z + 2 = 0$.

γ. $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$.

δ. $z^2 - (2-i)z + 3 - i = 0$.

ε. $z^2 = \overline{z}$.

39. Να λυθούν οι εξισώσεις.

α. $3z + (2-z)i = 0$.

β. $\dfrac{1}{z} + 2z = 1$.

γ. $z^2 + iz + 1 = 0$.

δ. $z^3 + 3z^2 + 4z - 8 = 0$.

ε. $z^3 + 2z + i = 0$.

40. Να λύσετε την εξίσωση $\left(z + \dfrac{1}{z}\right)\left(z + \dfrac{9}{z}\right) = 0$.

41. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(z) = z^3 - 7z^2 + 16z - 10$.

α. Να αποδείξετε ότι το $z = 1$ είναι ρίζα του $P(z)$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(z) = 0$.

42. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$P(z) = z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 4z + 7$$

α. Να αποδείξετε ότι το $P(z)$ έχει το i ρίζα.

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(z) = 0$.

43. Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = 0$ με $f(z) = z^3 + (2-i)z^2 + (5-2i)z - 5i$ αν γνωρίζουμε ότι ο αριθμός i είναι μία ρίζα της εξίσωσης.

44. Δίνεται ότι ο αριθμός $2+i$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $3z^3 - 10z^2 + 7z + 10 = 0$. Να βρείτε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης.

45. Να λύσετε την εξίσωση $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$ αν γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα φανταστικό αριθμό.

46. Να δείξετε ότι αριθμός i είναι μια λύση της εξίσωσης $z^3 - (3+3i)z^2 + (3+4i)z + 1 - 5i = 0$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση.

47. Να υπολογιστούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ώστε ο $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ να είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 - 4\eta\mu\alpha z - 8\sigma\upsilon\nu\beta = 0$.

48. Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta > 0$, ώστε ο $z_1 = 3 - 2i$ να είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 - 2\ln\beta z + 3e^{\alpha} = 0$.

49. α. Να λυθεί η εξίσωση $z^2 + 2z + 2 = 0$.

β. Να υπολογισθεί ο μιγαδικός $w = \frac{2z_1^2 - z_1^3}{4z_1 - z_1^3}$, όπου z_1 η ρίζα της παραπάνω εξίσωσης με $Im(z_1) < 0$.

γ. Να αποδειχθεί ότι $(2z_1^2 - z_1^3)^{4\nu} = (4z_1 - z_1^3)^{4\nu}$.

50. Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$ και οι μιγαδικοί $w_1 = \frac{z_1 + z_2 + 5i}{z_1\overline{z_1} + i}$, $w_2 = \frac{5 - (z_1 + \overline{z_1})i}{z_1 z_2 + i}$.

α. Να υπολογίσετε τους w_1, w_2.

β. Να αποδείξετε ότι $w_1^{4\nu} - w_2^{4\nu} = 0$.

51. Έστω ο μιγαδικός $w = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$, με $\theta \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο w^{2004}, αν η εξίσωση $z^2 + 4\sigma\upsilon\nu\theta z + 8\eta\mu\theta = 0$ έχει ρίζα τον $z_1 = \sqrt{3} - i$.

52. Έστω z_1, z_2 οι συζυγείς μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης $z^3 = 1$. Να αποδείξετε ότι:

α. $1 + z_1 + z_2 = 0$.

β. $z_1^2 = z_2$ και $z_2^2 = z_1$.

γ. $(1 - z_1 + z_1^2)(1 + z_1 - z_1^2) = 4$.

53. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$ και $z^{1382} + z^{100} + 1 = 0$.

54. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $(2z - 1)^2 < 0$ και $4z^2 + 1 < 4z$.

β. $z^2 + 4\overline{z} + 4 < 0$ και $z^2 + 4 < -4\overline{z}$.

γ. $z^2 - 4z + 5 < 0$ και $z^2 + 5 < 4z$.

55. Να γραφεί ο μιγαδικός $w = 3 + 5i$ σαν άθροισμα δύο μιγαδικών z_1, z_2 οι εικόνες Μ και Ν των οποίων είναι σημεία των ευθειών $\varepsilon_1: y = x - 2$ και $\varepsilon_2: y = -3x + 1$ αντίστοιχα.

56. Να γραφεί ο $w = 1 + 4i$ ως γινόμενο δύο μιγαδικών z_1, z_2 οι εικόνες Μ, Ν των οποίων είναι σημεία των ευθειών $\varepsilon_1: y = x - 1$ και $\varepsilon_2: y = -x + 5$ αντίστοιχα.

57. Να γραφεί ο μιγαδικός $z = 3 + 2i$ ως άθροισμα δύο μιγαδικών z_1, z_2 οι διανυσματικές ακτίνες των οποίων είναι παράλληλες στις $\varepsilon_1: y = 2x + 3$ και $\varepsilon_2: y = -x + 1$αντίστοιχα.

58. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} = 1$ και $z_1 + z_2 + z_1 z_2 - 1 \neq 0$, να δειχθεί ότι $z_1 + z_2 - z_1 z_2 + 1 \neq 0$.

59. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} = 1$, να δειχθεί ότι ο $w = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

60. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} = 1$, να δειχθεί ότι ο $w = \dfrac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{I}$.

61. Έστω ο μη πραγματικός αριθμός z και ο μιγαδικός $w = \dfrac{z^2 + 1}{z}$. Αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε ότι:

α. $\dfrac{\overline{z}^2 + 1}{\overline{z}} = \dfrac{z^2 + 1}{z}$ β. $z\overline{z} = 1$

62. Έστω ο μιγαδικός $w = \dfrac{z}{\overline{z}} - \dfrac{(z + \overline{z})(z - \overline{z})}{2z\overline{z}}, z \neq 0$. Να αποδείξετε ότι ο $w \in [-1, 1]$.

63. Έστω ο μιγαδικός $w = \dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z}, z \neq 0$. Να αποδείξετε ότι ο $w \in [-2, 2]$.

64. Θεωρούμε το μιγαδικό z και τη συνάρτηση

$$f(z) = (1 - i)z + (1 + i)\overline{z} + 1.$$

α. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $f(\overline{z})$ και $\overline{f(z)}$.

β. Αν ισχύει ότι $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

65. Θεωρούμε το μιγαδικό z και τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{(z - 1)(\overline{z} + 1)}{z + \overline{z}}$, όπου $z \notin \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $f\left(-\dfrac{1}{\overline{z}}\right) = f(z)$.

66. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 και ο $w = (\overline{z_1} z_2 + z_1 \overline{z_2})^2$. Να δειχθεί ότι ο w είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός.

67. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 και ο $w = (\overline{z_1} z_2 - z_1 \overline{z_2})^2$. Να δειχθεί ότι ο w είναι μη θετικός πραγματικός αριθμός.

68. Αν ισχύει η σχέση $(x + yi)^3 = (\alpha + \beta i)^7$ με $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $(x^2 + y^2)^3 = (\alpha^2 + \beta^2)^7$.

69. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ο $w = \dfrac{z - 2i}{2z - i}$ ανήκει:

α. στο $\mathbb{R}$ β. στο $\mathbb{I}$

70. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z και ο μιγαδικός αριθμός $w = \dfrac{\overline{z} + 1}{z}$. Αν ο w είναι πραγματικός αριθμός να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

71. Αν ο μιγαδικός $w = \dfrac{z - 4i}{z - 2}$ είναι πραγματικός, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z.

72. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ο $w = \frac{z(z - i)}{1 + zi}$ επαληθεύει τη σχέση $w^2 + \overline{w} + 1 \in \mathbb{R}$.

73. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z στις παρακάτω περιπτώσεις.

α. $z = 2\kappa + 1 + (\kappa - 1)i$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

β. $z = 2\eta\mu\theta + 3\sigma\upsilon\nu\theta i$, με $\theta \in \mathbb{R}$.

γ. $z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$, με $\theta \in \mathbb{R}$.

δ. $z = 1 + 2(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$, με $\theta \in \mathbb{R}$.

ε. $z = 2 - \sigma\upsilon\nu\theta + (3 - \eta\mu\theta)i$, με $\theta \in \mathbb{R}$.

74. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z στις παρακάτω περιπτώσεις.

α. $z = \alpha(1 + 2i) - 1 - 3i$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

β. $z = (\lambda - 1)^2 + 2(1 - \lambda)i$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ. $z = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) + 2i$, με $\theta \in \mathbb{R}$.

δ. $z = (\lambda + i)^2 + 1$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

ε. $z = \varepsilon\varphi\theta + i\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$, όπου $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

75. Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό z και τον μιγαδικό αριθμό $w = (z + 3)(2\overline{z} - i)$. Αν ο $w \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

76. Αν οι εικόνες των μιγαδικών w κινούνται στην ευθεία $y = 2x - 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z με $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ για τους οποίους ισχύει $zw = 1 + 2i$.

77. Έστω οι μιγαδικοί z και $w = z^2 + z + 1$. Αν ο μιγαδικός $w \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

78. Έστω ο μιγαδικός $w = \frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}}$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z αν ισχύει $\mathrm{Re}(w) = 1$.

79. Έστω ο μιγαδικός $w = -\frac{1}{z}$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z αν ισχύει:

α. $\mathrm{Re}(w) = \frac{1}{4}$ β. $\mathrm{Im}(w) = -\frac{1}{2}$

80. Έστω ο μιγαδικός $w = \frac{z - 2}{z + 1}$.

Αν ισχύει $\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Im}(w)$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

81. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

α. $\mathrm{Re}\left(z - \frac{4}{\overline{z}}\right) = -\mathrm{Im}(iz)$ β. $\mathrm{Re}\left(z + \frac{4}{z}\right) = 2\,\mathrm{Re}(zi)$

82. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $\mathrm{Re}(z+2\bar{z}+1)=2\,\mathrm{Im}(\bar{z}+1+3i)$.

83. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=2+4i$ και $z_2=1+2i$. Αν w τυχαίος μιγαδικός για τον οποίο ισχύει ότι $\mathrm{Im}(w)z_1+\mathrm{Re}(w)z_2=0$ να αποδειχθεί ότι η διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ της εικόνας M του w, είναι κάθετη στην ευθεία $y=2x$.

84. Αν $z_1+z_2\in\mathbb{R}$ και $z_1z_2\in\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι οι μη πραγματικοί z_1, z_2 είναι συζυγείς.

85. Αν $z_1+z_2\in\mathbb{R}$ και $z_1-z_2\in\mathbb{I}$, να δειχθεί ότι οι μη πραγματικοί z_1, z_2 είναι συζυγείς.

86. Αν για το μη φανταστικό z ο μιγαδικός $w=\dfrac{z^2}{2z+\bar{z}}$ είναι φανταστικός, να βρεθούν οι ευθείες πάνω στις οποίες κινούνται οι εικόνες των $M(z)$.

87. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, έτσι ώστε:
   α. οι εικόνες των μιγαδικών z, $\bar{z}i$ και $\bar{z}-1+2i$ είναι συνευθειακά σημεία.
   β. οι εικόνες των μιγαδικών z, $z-1$ και z^2 είναι συνευθειακά σημεία.
   γ. οι εικόνες των μιγαδικών z, i και zi είναι συνευθειακά σημεία.

88. Έστω η συνάρτηση f με $f(z)=\dfrac{(z-i)(\bar{z}+i)}{z+\bar{z}}, z\in C$ και $\mathrm{Re}(z)\neq 0$.
   α. Να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right)=f(z)$.
   β. Να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{-iz}\right)\in\mathbb{R}$.
   γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $\mathrm{Re}\left(f\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right)\right)=\mathrm{Im}\left(f\left(\dfrac{i}{z}\right)\right)+2\,\mathrm{Re}(z)$.

89. Έστω οι μιγαδικοί z, w όπου w σταθερός μιγαδικός. Αν ισχύει $z\bar{z}-2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})=1-|w|^2$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

90. Έστω οι μιγαδικοί $z_1=1+2i$ και $z_2=3+4i$. Να βρεθούν τα μέτρα των μιγαδικών:
   α. z_1 και z_2, β. $\overline{z_1}z_2^2$, γ. $\dfrac{iz_1}{z_2}$,
   δ. $\dfrac{\overline{z_2}^{1002}}{z_1^{2004}}$, ε. $\dfrac{|-z_2|^3\,\overline{z_1}^2}{z_1^5}$

91. Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών.
   α. $z_1=\dfrac{(2+5i)^6(3-i)^8(1-i)^3}{(2-3i)^4(1+i)^2}$

β. $z_2 = \left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{\nu}$

γ. $z_3 = \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + i\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^{8}$

δ. $z_4 = \dfrac{(1-2i)^{\nu+2}}{(1+2i)^{\nu-2}}$

ε. $z = \dfrac{(1+i)^{20}(6+2i)-(1-i)^{198}(3-i)}{(1+i)^{196}(23-7i)+(1-i)^{194}(10-2i)}$

92. Να περιγραφούν γεωμετρικά οι παρακάτω σχέσεις.
α. $|z| = 1$
β. $|z-2-3i| = 3$
γ. $|z+2-i| = 5$
δ. $|z-1+3i| = 7$
ε. $|z-2i| = 1$
στ. $|z+3| = 2$
ζ. $|z-2+i| < 2$
η. $|z-i| \leqslant 4$
θ. $|z+2| > 5$
ι. $|z-3+4i| \geqslant 3$

93. Να περιγραφούν γεωμετρικά οι παρακάτω σχέσεις.
α. $1 < |z-3i| < 4$
β. $2 \leqslant |z-5i| < 5$
γ. $|z| = |z-2|$
δ. $|z+1-3i| = |z-2-i|$
ε. $|z+1| = |z+2-i|$
στ. $|z+1| = |z-i|$
ζ. $|z-1+i| < |z+2i|$
η. $|z-1+3i| \leqslant |z|$
θ. $|z-4| > |z+2|$
ι. $|z-3+i| \geqslant |z-1|$

94. Έστω δύο μιγαδικοί z_1, z_2 με $z_2 \neq 0$. Να δειχθεί ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1+z_2, z_1-z_2 και $z_1+i\sqrt{3}\,z_2$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

95. Να λυθούν οι εξισώσεις.
α. $z^2 - |z| + 2 = 0$
β. $|2\bar{z}+1| = z+2$
γ. $|z+1| = z^2 - 1$
δ. $|z^2| = \bar{z} + 1 - i$
ε. $|z|i - z = 1+2i$

96. Να λυθούν οι ανισώσεις.

α. $z^2 - 4 > 3|z|$

β. $|z^2 - 1| \leqslant 2\overline{z}i$

γ. $|\overline{z}^2 - i| \leqslant z + 2 - i$

97. Να βρεθεί ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει $|z| = 1$ και $|z - 1| = 1$.

98. Έστω z, w μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι:

α. $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$

β. $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$

γ. $|1 - \overline{z}w|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$

δ. $|z + i\overline{z}|^2 = 2|z|^2 + 2\,\mathrm{Im}(z^2)$

99. Έστω z, w μιγαδικοί για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $|z| = 3$, $|w| = 2$ και $|z + w| = 5$.

α. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z\overline{w}) = 6$.

β. Να υπολογίσετε το $|z - w|$.

100. Δίνεται ότι για τον μιγαδικό z ισχύει $|z + 4| = 2|z + 1|$. Να βρεθεί το μέτρο του z.

101. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_2 \neq 0$ και $\frac{z_1}{z_2} > 0$ να δείξετε ότι $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

102. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow |z| = 1$.

103. Για κάθε μιγαδικό z να δείξετε $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leqslant \sqrt{2}|z|$.

104. α. Για κάθε μιγαδικό $z, w \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι

i. $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

ii. $|z - w|^2 \leqslant (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$

β. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει $z^2 = z_1 z_2$. Να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{z_1^2 + z_2^2}{2} + z^2\right| + \left|\frac{z_1^2 + z_2^2}{2} - z^2\right| = |z_1|^2 + |z_2|^2$$

105. Έστω z, w μιγαδικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι

$$\left|\frac{z + w}{1 + \overline{z}w}\right| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ ή } |w| = 1$$

106. Έστω z, w μιγαδικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι

α. Αν $|z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2$ και $w \neq 0$ τότε $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = 0$.

β. Αν $|z - wi|^2 = |z|^2 + |w|^2$ και $w \neq 0$ τότε $\mathrm{Im}\left(\frac{z}{w}\right) = 0$.

107. Έστω z_1, z_2, w μιγαδικοί αριθμοί με $|z_1| = |z_2| = 1$. Να δειχθεί ότι ο μιγαδικός $u = \frac{w + z_1 z_2 \overline{w} - 2(z_1 + z_2)}{z_1 - z_2}$ με $z_1 \neq z_2$ είναι φανταστικός.

108. Έστω z_1, z_2 μιγαδικοί με $|z_1| = |z_2|$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$ περιττός. Να δειχθεί ότι ο $w = \dfrac{(z_1 - z_2)^\nu}{z_1^\nu + z_2^\nu}$ είναι φανταστικός αριθμός.

109. Έστω z_1, z_2 μιγαδικοί με $|z_1| = |z_2| = 1$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να δειχθεί ότι ο $w = \dfrac{(z_1 + z_2)^\nu}{1 - z_1^\nu z_2^\nu}$ είναι φανταστικός.

110. Αν οι αριθμοί $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_\nu$ ικανοποιούν την ανισότητα $\left|\dfrac{z_1 - i}{z_1 + i}\right| + \left|\dfrac{z_2 - i}{z_2 + i}\right| + \ldots + \left|\dfrac{z_\nu - i}{z_\nu + i}\right| < 1$ τότε θα ικανοποιούν την ανισότητα $\left|\dfrac{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu - i}{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu + i}\right| < 1$.

111. Αν $z, \alpha \in \mathbb{C}$ και $w = \dfrac{z - \alpha}{\bar{\alpha} z - 1}$ με $z \neq \dfrac{1}{\bar{\alpha}}$ και $0 < |\alpha| < 1$ τότε:

α. Να δείξετε ότι $|z| > 1$ αν ισχύει $|w| > 1$.
β. Να δείξετε ότι $|z| < 1$ αν ισχύει $|w| < 1$.

112. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ να δείξετε ότι:
α. $z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2$.
β. $z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 \leqslant 2|z_1 z_2|$.

113. Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει $|z_1| < |z_2|$ να δείξετε ότι $|1 - z_1| - |1 - z_2| \leqslant 1 + \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$.

114. Αν ισχύει η σχέση $|z + |z|| + |z - |z|| = 2|z|$ να δείξετε ότι $z \in \mathbb{R}$.

115. Να δείξετε ότι για κάθε $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ισχύει $\left|\dfrac{z_2 + z_3}{2} - z_1\right| - \dfrac{1}{2}|z_1 - z_2| \leqslant \dfrac{1}{2}|z_3 - z_1|$.

116. Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ και ισχύουν οι σχέσεις $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $\dfrac{|z_1|}{2} = \dfrac{|z_2|}{3} = \dfrac{|z_3|}{5}$ να δείξετε ότι $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$.

117. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $(1 + iz)^\nu = \dfrac{2 + i}{1 - 2i}$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

118. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $(i + z)^\nu = \dfrac{3 + 2i}{2\sqrt{3} - i}$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

119. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $(1 + iz)^3 = (z + i)^7$ δεν έχει πραγματική λύση.

120. Έστω οι μιγαδικοί $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ οι οποίοι έχουν ίσα μέτρα. Να αποδείξετε ότι

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1|^2 \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right|.$$

121. Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύουν $\left|\dfrac{z_1 - 9}{z_1 - 1}\right| = 3$ και $\left|\dfrac{z_2 - 4}{z_2 - 1}\right| = 2$, να βρεθεί η τιμή του $\left|\dfrac{4z_1 + 9z_2}{z_1 + z_2}\right|$.

122. Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύουν $|z_1| = \frac{|z_2|}{2} = \frac{|z_3|}{4}$, να δειχθεί $\left|\frac{z_2 z_3 + 4z_1 z_3 + 16z_1 z_2}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = 8|z_1|$.

123. Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύει $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Να δειχθεί ότι:

α. $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$.

β. $z_1^{2009} + z_2^{2009} + z_3^{2009} = 0$.

124. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$. Να αποδείξετε ότι:

α. ο $w = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

β. $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3}|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

125. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

126. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z - 2 + 3i| = |z - 1 + i|$.

127. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z + 2i| = |z - 3 + i|$.

128. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z - 1 + i| \leqslant |z + i|$.

129. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z + 3 - i| > |z - 2|$.

130. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$, αν για τους μιγαδικούς $z = 2x - 3 + (y - 2)i$ ισχύει $|z + 1| < |\bar{z} - 1 + 2i|$.

131. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$, αν για τους μιγαδικούς $z = x - 2 + yi$ ισχύει $|\bar{z} + 1 - 4i| \geqslant |z + 2 - i|$.

132. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $(z - 1 + 2i)^7 = (z + 3i)^7$.

133. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $(z + 3 - 2i)^\nu = (2z + 3 - i)^\nu$.

134. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $\frac{|z - 2i|}{|z + 2i|} = 2$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

135. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|2z + 1| = |z - 1 - i|$.

136. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών για τους οποίους ισχύει $|2z + 3| \leqslant |z - 3 + i|$.

137. Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ και $y \neq 0$. Αν ο αριθμός $w = \dfrac{\bar{z}^2}{z - 1}$ είναι πραγματικός να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ είναι μια υπερβολή της οποίας έχουν εξαιρεθεί οι κορυφές.

138. Αν $z \in \mathbb{C}$ και ισχύει $|z - 1| = 2|z + 1|$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν η εικόνα του μιγαδικού $w = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{4}{3}i$ ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο.

139. Αν $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)$ με $\alpha \in [0, 2\pi)$ και $\rho > 0$ να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

140. Δίνεται η εξίσωση $z^2\sigma\upsilon\nu^2\theta - z\eta\mu 2\theta + 2 - \sigma\upsilon\nu^2\theta = 0$. Έστω Μ η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο εκείνης της ρίζας της εξίσωσης της οποίας το φανταστικό μέρος είναι αρνητικό. Αν $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ να δείξετε ότι το Μ κινείται σε μια υπερβολή.

141. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w είναι $|z| < 1$, $|w| < 1$ να δείξετε ότι $|z - w| < |1 - \bar{z}w|$.

142. Έστω μιγαδικός z. Να δειχθεί ότι ισχύει
α. $|z| + |z + 3| \geqslant |z + 1| + |z + 2|$.
β. $|z| + |z - 1| + |z - i| + |z - 1 - i| \geqslant 2\sqrt{2}$.
γ. $|z + 2| + |z - 1| \leqslant |z + 1| + |z| + 2$.
δ. $|z + 3i| + |z - i| \leqslant 2|z + i| + 4$.
ε. $|5z - 3| + |2z + 5| - 3|z - 1| - 2|z| - 2|z + 2| \leqslant 1$.
στ. $|4z - 5| + |3z - 2| - 7|z - 1| \leqslant 2$.
Να βρεθούν οι μιγαδικοί που επαληθεύουν την ισότητα.

143. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο κέντρου $K(0, 0)$ και ακτίνας $\rho = 1$ να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z + 8 - 6i|$.

144. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο κέντρου $K(0, -1)$ και ακτίνας $\rho = 1$ να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z + 2 - 3i|$.

145. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο κέντρου $K(1, -2)$ και ακτίνας $\rho = 1$ να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z + 2 - i|$.

146. Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει $|z + 2 - 3i| = 3$. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z + 2 - 2i|$.

147. Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει $|z - 1| \leqslant 2$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z - 3|$.

148. Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει $|z+2i| \leqslant 1$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z-6+2i|$.

149. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε κυκλικό δίσκο με κέντρο $K(0,2)$ και ακτίνας 2, να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z+4+i|$.

150. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύει $(1+i)z+(1-i)\bar{z}+4=0$ και $(w-2)(\bar{w}-2)=1$. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w.

151. Αν ισχύει $|z-2-i| \leqslant 5$ να δείξετε ότι $8 \leqslant |z-14-6i| \leqslant 18$.

152. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν αντίστοιχα $|z-3i|=1$ και $|w-4|=2$. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

153. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z|=1$ να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|z^3-z+2|$ και το μιγαδικό z για τον οποίο η παράσταση αυτή γίνεται μέγιστη.

154. Αν $|z_1|=1$ και $|z_2|=2$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\Pi=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$.

155. Αν $|z|=3$ και $|w|=2$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\Pi=|1-w\bar{z}|^2-|z-w|^2$.

156. Αν Α η εικόνα του $z_1=\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta$ και Β του $z_2=1+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta$, να δειχθεί ότι το ΟΑΒ είναι ισοσκελές και να βρεθεί το μέγιστο μήκος της βάσης του.

157. Αν ο λόγος των αποστάσεων της εικόνας Μ του z από τις εικόνες των $z_1=4+2i$ και $z_2=1-i$ ισούται με 2, να βρεθεί η απόσταση της εικόνας του z από το $K(0,-2)$.

158. Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν $|z-1-2i|=2$ και $|w-1-2i|=|w-4-6i|$. Να δειχθεί ότι $\frac{1}{2} \leqslant |z-w| \leqslant \frac{9}{2}$.

159. Έστω οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν $|z+4+3i|=2$ και $|2w-i|=|w-2i|$. Να δειχθεί ότι $2 \leqslant |z-w| \leqslant 8$.

160. Δίνεται ο μιγαδικός $z=\lambda-2+(2\lambda+3)i$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου του μιγαδικού z.

161. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=\alpha-2+(2\beta-5)i$. Αν τα σημεία $A(\alpha,\beta)$ ανήκουν στην ευθεία $y=3x-1$, να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z_1 που έχει το ελάχιστο μέτρο.

162. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z}=2\alpha+1+(3-\alpha)i$. να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z_1 που έχει το ελάχιστο μέτρο.

163. Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύει η σχέση $|z-2+i|=2$. Να βρείτε τον μιγαδικό z_1 που έχει το μέγιστο μέτρο και τον μιγαδικό z_2 που έχει το ελάχιστο μέτρο.

164. Έστω ο μιγαδικός αριθμός

$$z = 3\eta\mu\theta - 2 + (3\sigma\upsilon\nu\theta + 2)i.$$

Να βρείτε τον μιγαδικό z_1 που έχει το μέγιστο μέτρο και τον μιγαδικό z_2 που έχει το ελάχιστο μέτρο.

165. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $\overline{z} = 2\kappa + 1 + (2\lambda - 1)i$. Αν τα σημεία $A(\kappa, \lambda)$ ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο να βρείτε τον μιγαδικό z_1 που έχει το μέγιστο μέτρο και τον μιγαδικό z_2 που έχει το ελάχιστο μέτρο.

166. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε ένα κύκλο με κέντρο το $K(2,1)$ και ακτίνα 2, να δειχθεί ότι η παράσταση $\Pi = |z - 2 + i|^2 + |z - 2 - 3i|^2$ είναι σταθερός πραγματικός αριθμός.

167. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε ένα κύκλο με κέντρο το $K(3,4)$ και ακτίνα 5, να δειχθεί ότι η παράσταση $\Pi = |z|^2 + |z - 6 - 8i|^2$ είναι σταθερός πραγματικός αριθμός.

168. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε ένα κύκλο με κέντρο το $K(0,-2)$ και ακτίνα $\sqrt{8}$, να δειχθεί ότι η παράσταση $\Pi = |z + 2|^2 + |z - 2 + 4i|^2$ είναι σταθερός πραγματικός αριθμός.

169. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 3 + \sqrt{3}i$ και $z_3 = 3 + 3i$. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου που σχηματίζουν οι εικόνες των μιγαδικών.

170. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν $|z - 4 - 4i| = 5$ και $|2w + 1| = |w + 2|$. Να δειχθεί ότι $0 \leqslant |z - w| \leqslant 6 + 4\sqrt{2}$.

171. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν $|z - 1 - 2i| = 2$ και $|w - 1 - 2i| = |w - 4 - 6i|$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z κινούνται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

β. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών w ανήκουν σε ευθεία ε της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

γ. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση των εικόνων του μιγαδικού z από την ευθεία ε.

172. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν $w = z + \frac{2}{z}$ και $|z| = 2$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w.

173. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w για τους οποίους ισχύουν $w = 2z + \frac{3}{z}$ και $|z| = 3$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w.

174. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύουν:

α. $|z+2|+|z-2|=6$.

β. $|z+i|+|z-i|=4$.

γ. $|z+3|-|z-3|=2$.

δ. $|z+2|-|z-2|=2$.

ε. $\dfrac{1}{|z-4i|}+\dfrac{1}{|z+4i|}=\dfrac{10}{|z-4i||z+4i|}$.

στ. $\dfrac{1}{|z-2i|}-\dfrac{1}{|z+2i|}=\dfrac{2}{|z-2i||z+2i|}$.

ζ. $\dfrac{1}{|z-3i|}+\dfrac{1}{|z+3i|}=\dfrac{10}{|z^2+9|}$.

175. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}, \alpha\in\mathbb{R}$ (1).

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από την σχέση (1) για $\alpha=0$ και $\alpha=2$ αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(z_1)^{2\nu}=(-z_2)^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν.

176. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν $|(i+2\sqrt{2})z|=6$ και $|w-(1-i)|=|w-(3-3i)|$ τότε να βρεθούν:

α. ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z.

β. ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w.

γ. η ελάχιστη τιμή του $|w|$.

δ. η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

177. Οι μιγαδικοί αριθμοί z, w συνδέονται με τη σχέση $w=z+\dfrac{2\alpha^2}{z}$ όπου α ένας σταθερός θετικός πραγματικός αριθμός. Αν η εικόνα $P(\kappa,\lambda)$ του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στο κύκλο $|z|=\alpha$, να δείξετε ότι η εικόνα $M(x,y)$ του w κινείται σε έλλειψη.

178. Αν οι μιγαδικοί $w=x+yi$, $z=\kappa+\lambda i$ συνδέονται με τη σχέση $w=\dfrac{z-1}{z+i}$ και η εικόνα P του z κινείται στον κύκλο με εξίσωση $\kappa^2+\lambda^2=4$, να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινείται η εικόνα M του w.

179. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z-7|=|z+7|+6$.

180. Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ και $y \neq 0$. Αν ο αριθμός $w = z^2 - 6z + 5$ είναι πραγματικός να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$.

181. Αν οι μιγαδικοί $w = x + yi$, $z = \kappa + \lambda i$ συνδέονται με τη σχέση $w = \dfrac{z - 1}{z + 2}$ και η εικόνα P του z κινείται στην ευθεία $2\kappa - \lambda = 0$, να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινείται η εικόνα M του w.

182. Οι μιγαδικοί αριθμοί z, w συνδέονται με τη σχέση $\dfrac{2z - i}{z - 2i} + i\dfrac{2w - i}{w - 2i} = 0$. Αν η εικόνα $P(\kappa, \lambda)$ του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στο κύκλο $|z| = 1$ να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινείται η εικόνα $M(x, y)$ του w.

183. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z που επαληθεύουν τις σχέσεις $|z + i| + |z - i| = 6$ και $\operatorname{Im}(z) > 1$.

184. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z που επαληθεύουν τη σχέση $|z - 3| = 2 + |z + 3|$.

185. Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi$ με $y \neq 0$. Αν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1 = -1$, $z_2 = z^2 + 1$, $z_3 = 2z$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων $M(x, y)$ των μιγαδικών z.

186. Έστω $z = x + yi$ με $y \neq 0$ ένας μιγαδικός αριθμός. Αν ο αριθμός $w = \dfrac{\bar{z} + 2}{z + 2}$ είναι φανταστικός να δείξετε ότι το σημείο $M(x, y)$ διαγράφει δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες εκτός του σημείου τομής τους.

187. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $\big||z + 4 - 3i| - |z - 4 - 3i|\big| = 6$.

188. Δίνονται οι μιγαδικοί $z = \dfrac{\alpha + i}{\alpha - i}$ και $w = \dfrac{1 + \alpha i}{1 - \alpha i}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο.

189. Δίνεται ο μιγαδικός $z = \dfrac{1}{\alpha + 3i}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινείται η εικόνα M του z.

190. Αν $z = \dfrac{1 + \alpha}{1 + i + 2\alpha}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινείται η εικόνα του z.

191. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ με $|\alpha| = |\beta| = 1$.
   α. Να δείξετε ότι $\alpha + \beta - \alpha\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \alpha\beta - 1 = 0$.
   β. Να βρείτε όλα τα ζεύγη (α, β) που ικανοποιούν τη σχέση $\alpha + \beta - \alpha\beta + 1 = 0$.
   γ. Αν $\alpha + \beta - \alpha\beta + 1 \neq 0$ να δείξετε ότι $\left|\dfrac{\alpha + \beta + \alpha\beta - 1}{\alpha + \beta - \alpha\beta + 1}\right| = 1$.

192. Να λυθούν στο σύνολο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις:

α. $\overline{z}^5 z^9 = 1$.
β. $z^\nu = \bar{z}$.
γ. $z^\nu = -\bar{z}$.
δ. $z^\nu = -|z|$.
ε. $z^\nu = i\bar{z}$.

193. Αν α, β, γ είναι μιγαδικοί αριθμοί διαφορετικοί ανά δύο και $\alpha\overline{\beta} = \beta\overline{\gamma} = \gamma\overline{\alpha}$, να αποδειχθεί ότι:
α. Οι αριθμοί α, β, γ δεν είναι μηδέν.
β. $|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$.
γ. Το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών α, β, γ είναι ισόπλευρο.

194. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει $3z^7 + 7\overline{z}^7 = 10$. Να αποδείξετε ότι:
α. $z^7 = \overline{z}^7 = 1$.
β. Οι εικόνες των παραπάνω μιγαδικών z είναι ομοκυκλικά σημεία.
γ. Αν $z \neq 1$, τότε ο αριθμός $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ είναι φανταστικός.

195. α. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $z_1 + z_2 = 4 + 4i$ και $2z_1 - \overline{z_2} = 5 + 5i$. Να βρείτε τους μιγαδικούς z_1 και z_2.
β. Οι μιγαδικοί αριθμοί z, w ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z - 1 - 3i| \leqslant \sqrt{2}$ και $|w - 3 - i| \leqslant \sqrt{2}$.
i. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί z, w έτσι, ώστε $z = w$.
ii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

196. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.
α. Να αποδειχθεί ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_1 - z_3|$.
β. Να αποδειχθεί ότι $|z_1 - z_2|^2 \leqslant 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \geqslant -1$.
γ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

197. Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 δεν είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους και ισχύουν οι σχέσεις:

$$2|z_1 - z_2| + (\lambda - 2)|z_1 - z_3| - 2|z_2 - z_3| = 0$$
$$|z_1 - z_2| - |z_1 - z_3| = (2 - \lambda)|z_2 - z_3| \qquad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}$$
$$|z_1 - z_2| + |z_1 - z_3| = 2|z_2 - z_3|$$

να δείξετε ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

198. α. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει η σχέση $z^2+iz-1=0$ να δείξετε ότι $z^3=-i$.

β. Αν ο αριθμός z είναι ρίζα της εξίσωσης $\left(z^{1998}+1\right)^2+iz^{1998}=1-i$ να δείξετε ότι $\left(z_1^{1998}+1\right)^{1998}=-1$.

199. Να δείξετε ότι η εξίσωση $|z|^2+|z_0|^2=2\,\mathrm{Re}\left(z_0\bar{z}\right)+\alpha^2$ παριστάνει κύκλο με κέντρο την εικόνα του z_0 και ακτίνα $\alpha>0$.

200. Δίνεται ο μιγαδικός $z=x+yi$ για τον οποίο ισχύει η σχέση $|z+2\bar{z}+1|=\sqrt{3}|z+\bar{z}|$. Να δείξετε ότι η εικόνα Μ του μιγαδικού z κινείται σε υπερβολή.

201. Αν $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ να δείξετε ότι $\dfrac{|z_1|}{4}=\dfrac{|z_2|}{3}=\dfrac{|z_1-z_2|}{5}\Leftrightarrow 9z_1^2+16z_2^2=0$.

202. Αν $z_1\neq z_2$, $z_3=\left(1+\dfrac{1}{2}i\right)z_2-\dfrac{1}{2}iz_1$ να δείξετε ότι οι εικόνες των z_1,z_2,z_3 είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

203. Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τις ρίζες της εξίσωσης $z^2-z|z|+|z|^2=0$.

204. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο κέντρου $K(1,-1)$ και ακτίνας $\rho=2$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $w=\dfrac{2z}{z-1}$.

205. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο κέντρου $K(1,1)$ και ακτίνας $\rho=\sqrt{2}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $w=\dfrac{1}{\bar{z}}$.

206. Αν $\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\beta}{3}=\dfrac{1}{\gamma}$ να δειχθεί ότι οι μιγαδικοί $z_1=2(\alpha+\beta)+(\beta-\alpha)\gamma i$ και $z_2=5\alpha+i$ είναι ίσοι.

207. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει ότι $z^2-z+1=0$, να αποδειχθούν:

α. $z^{50}+z^{70}+z^{90}=0$.

β. $z^{40}+z^{-40}+1=0$.

γ. $(z-1)^{31}+(z-1)^{30}+(z-1)^{29}=0$.

208. Αν $\dfrac{z-w\bar{z}}{1-w}\in\mathbb{R}$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, αν για το σταθερό $w=\alpha+\beta i$ είναι $\alpha^2+\beta^2\neq 1$.

209. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ο $w=2z-\bar{z}^2$ είναι θετικός πραγματικός. Κατόπιν να βρεθεί ο z για τον οποίο $\sqrt{w}=1$.

210. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ο $w=2\alpha\bar{z}+z^2-2z$ είναι θετικός πραγματικός αριθμός και $\alpha\in(-1,0)$.

211. Να αποδειχθεί ότι οι εικόνες των μη μηδενικών λύσεων της $\bar{z}i = z^2$ σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

212. Αν $(2z + w)^7 = (1 + 2z\bar{w})^7$ και η εικόνα του w δεν ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z.

213. Αν ισχύει $\frac{1}{|z - 4i|} + \frac{1}{|z + 4i|} = \frac{10}{|z - 4i||z + 4i|}$, να υπολογιστεί το μέτρο του $w = 4z + \bar{z}$.

214. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους $\mathrm{Re}[(z - 1)(\bar{z} + 1)] = z + \bar{z}$. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς, να δειχθεί ότι $|z_1 - \overline{z_2}| \leqslant 2\sqrt{2}$.

215. Αν ο λόγος των αποστάσεων των $M(z)$ από τα $A(4,0)$, $B\left(\frac{5}{2},0\right)$ ισούται με 2, να βρεθούν οι μιγαδικοί με το ελάχιστο και μέγιστο μέτρο αντίστοιχα.

216. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z απέχουν μεγαλύτερη απόσταση από το σημείο $A(1, -1)$ από ότι από το $B(2,0)$, να δειχθεί ότι ισχύει $|z| > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

217. Να δειχθεί ότι αν $|z + 8i| \in [0, 2]$ τότε το $|z - 6| \in [8, 12]$.

218. Αν ο z_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $|z|^2 + 2\,\mathrm{Im}(w\bar{z}) + \rho^2 = 0$, όπου $\rho > 0$ και $w \in \mathbb{C}$ σταθερός:

α. Να βρεθεί η απόσταση της εικόνας του w από την αρχή των αξόνων.

β. Να βρεθεί ο μιγαδικός z_0.

γ. Να δειχθεί ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $z_0^{4\nu+2} + w^{4\nu+2} = 0$.

219. Αν $|z_1| = |z_2| = 1$ και ο $w \notin \mathbb{I}$ με $z_1 + z_2 + wz_1z_2 = w$, να βρεθούν οι μιγαδικοί z_1, z_2.

220. Αν $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = \kappa$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_2 - z_3} + \frac{1}{z_3 - z_1}$.

221. Αν $|z - iw| = |z| + |w|$, να δειχθεί ότι $|2z + w|^2 = 4|z|^2 + |w|^2$.

222. Αν $z^2 = wu$, με $z \neq 0$, να δειχθεί

$$\left|\frac{w + u}{2} + z\right| + \left|\frac{w + u}{2} - z\right| = |w| + |u|.$$

223. Αν $z^\nu + 2z^{\nu-1} + 4z^{\nu-2} + \ldots + 2^\nu = 0$ να αποδειχθεί ότι ο μιγαδικός $w = \left(\frac{z - 2}{z + 2}\right)^\nu \in \mathbb{I}$, όπου ν περιττός.

224. Να λυθεί η εξίσωση $\bar{z} = z^3$.

225. Να αποδειχθεί ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης:

$$(\sigma\upsilon\nu^2\theta)z^2 - (2\sigma\upsilon\nu\theta)z + 5\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 0,\ \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

226. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $z = (\lambda - 1)^2 + 2(1 - \lambda)i,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

227. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση $\bar{z} = z^3 - 2z + 2$ με $Re(z) \in \mathbb{Z}$.

228. Έστω Α, Β, Γ οι εικόνες των μιγαδικών α, β, γ αντίστοιχα. Αν $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ και $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδειχθεί ότι:
   α. Ισχύει $|\alpha - \beta| = |\beta - \gamma| = |\gamma - \alpha|$.
   β. Τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

229. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει $|z - 6 - 8i| = 5$.
   α. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z καθώς και η καρτεσιανή εξίσωση του.
   β. Να αποδειχθεί $5 \leqslant |z| \leqslant 15$.
   γ. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z|$.
   δ. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να βρεθούν αυτοί που έχουν:
      i. το ελάχιστο $|z|$.
      ii. το μέγιστο $|z|$.
   ε. Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί που επαληθεύουν τη δοσμένη σχέση, να βρεθεί η μέγιστη τιμή $|z_1 - z_2|$.

230. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ διαφορετικοί μεταξύ τους για τους οποίους $\alpha + \beta + \gamma = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$. Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών α, β, γ αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο να αποδείξετε ότι:
   α. $\alpha^2 = \beta\gamma$.
   β. $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$.
   γ. $(\alpha - \beta)^2 = (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$.
   δ. τα σημεία Α, Β, Γ ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων.
   ε. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.
   στ. οι εικόνες των μιγαδικών αβ, βγ, γα είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

231. Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού $w = \frac{z - 2i}{2iz + 1}$. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή $|z - w|$.

232. α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C_1 των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|(1 - i)z - 2| = 2$.
   β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C_2 των εικόνων των μιγαδικών w για τους οποίους ισχύει $\left|\frac{w + 2i}{w - 2 + 4i}\right| = 1$.
   γ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

233. Να βρείτε τη μορφή $\alpha + \beta i$ του μιγαδικού z, όταν:

α. η εικόνα του z ανήκει στην ευθεία ε: $2x - y + 1 = 0$.
β. $\mathrm{Im}(2z+1) = \mathrm{Re}(z-2)$.
γ. η εικόνα του z ανήκει στην παραβολή $y^2 = 4x$.
δ. η εικόνα του z ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$.

234. Δίνονται οι μιγαδικοί $z = (\lambda - 2) + (2\lambda - 4)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του $\frac{1}{z}$.
β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z^2.
γ. Αν είναι $w = z + \frac{5}{z}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του w ανήκει σε μια υπερβολή.

235. Δίνεται η εξίσωση: $z^2 + (\lambda - 2)z + \lambda^2 + 2 = 0$.
α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει μιγαδικές ρίζες.
β. Αν για τις ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης ισχύει $z_1^2 + z_2^2 = 4$ να βρείτε τη τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ και τις ρίζες z_1, z_2.

236. Έστω z, w μιγαδικοί.
α. Αν είναι $z + \frac{1}{w} = \bar{w} + \frac{1}{\bar{z}} = 2$ να αποδείξετε ότι:
i. $z = w$.
ii. $z = 1$.
β. Αν είναι $z + \frac{1}{w} = \bar{w} + \frac{1}{\bar{z}}$ και $\left(z + \frac{1}{w}\right)^2 - \bar{w} - \frac{1}{\bar{z}} - 2 = 0$ να βρείτε τους z,w.

237. Έστω οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει

$$\mathrm{Re}\left(z + \frac{4}{z}\right) = 2\,\mathrm{Re}(z) \ (1)$$

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.
β. Αν $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ τότε:
i. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w = z + \frac{4}{z}$ είναι πραγματικός και ισχύει $-4 \leqslant w \leqslant 4$.
ii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $c = z + 3 + 4i$.
iii. Για το ερώτημα (ii) να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο μέτρο του μιγαδικού c.
γ. Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 ικανοποιούν τη σχέση (1) και δεν είναι φανταστικοί να αποδείξετε ότι

$$|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3| = 2|z_1 + z_2 + z_3|$$

238. α. Να λυθεί η εξίσωση

$$(\eta\mu^2\alpha)z^2 - (6\eta\mu\alpha)z + 4\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 9 = 0, \ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

β. να δειχθεί ότι δεν υπάρχει γωνία α που να κάνει ορθογώνιο το τρίγωνο ΜΟΝ όπου Ο η αρχή των αξόνων και Μ, Ν οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης.

γ. Να βρεθεί η γωνία α ώστε το τρίγωνο ΜΟΝ να είναι ισόπλευρο.

δ. Για $\alpha = \frac{\pi}{6}$ να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $\nu \in \mathbb{N}^*$ ώστε $z^\nu \in \mathbb{N}^*$.

239. Έστω ότι για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύει: $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 1$.

β. $|z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3| = 1$.

γ. $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_1 + z_3|^2 = 4$.

240. Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$ και οι μιγαδικοί z_1, z_2 τέτοιοι ώστε: $z_1 = z|w| + w|z|$ και $z_2 = z|w| - w|z|$. Να αποδείξετε ότι:

α. Ο $z_1 \overline{z_2}$ είναι φανταστικός αριθμός.

β. Αν $z\bar{w} \in \mathbb{R}$, τότε $z_1 z_2 = 0$.

γ. Αν οι διανυσματικές ακτίνες των z, w είναι κάθετες μεταξύ τους, τότε: $|z_1| = |z_2|$.

241. Αν για δύο μιγαδικούς z, w ισχύουν $|z - w| = 6$ και $|z + w| = 10$, να αποδείξετε ότι:

α. $2 \leqslant |z| \leqslant 8$.

β. $\frac{1}{4} \leqslant \left|\frac{z}{w}\right| \leqslant 4$.

γ. $6 \leqslant |z - i| + |w - i| \leqslant 18$.

δ. $8 \leqslant |z + w - 2i| \leqslant 12$.

242. Αν για τους μιγαδικούς z, w ισχύουν: $|z - 3i| = 1$ και $|w - 4| = 2$. Να αποδείξετε ότι $2 \leqslant |z - w| \leqslant 8$.

243. Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύει: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3| \geqslant 3|z|$.

244. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό $z \neq 0$ ισχύει:

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| < |z + i| + \left|\frac{1}{z} + i\right|$$

245. Αν για τους z_1, z_2, z_3 ισχύει:

$$\left|\frac{1 - iz_1}{z_1 - i}\right| + \left|\frac{1 - iz_2}{z_2 - i}\right| + \left|\frac{1 - iz_3}{z_3 - i}\right| < 2$$

να αποδείξετε ότι το πολύ ένας από τους z_1, z_2, z_3 μπορεί να είναι πραγματικός.

246. Έστω $z \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε $|z + 3| = 2|z - 3|$.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

β. Αν είναι $w = \frac{z-9}{z-5}$, $z \neq 5$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w.

247. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = (2\lambda+1)+(2\lambda-1)i, \lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

γ. Να βρεθούν οι μιγαδικοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$.

248. Έστω z μιγαδικός τέτοιος ώστε: $|z-2i| = |z+4|$.

α. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|z+6|$.

β. Να βρείτε τη τιμή του z για την οποία γίνεται ελάχιστο το $|z-2-3i|$.

249. α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $\frac{1}{|z-3i|} + \frac{1}{|z+3i|} = \frac{10}{|z^2+9|}$.

β. Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση των εικόνων δύο μιγαδικών που ικανοποιούν την προηγούμενη εξίσωση.

250. Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \beta > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\left|\frac{\alpha+\beta}{2}z - \frac{\alpha-\beta}{2}\bar{z}\right| = \alpha\beta$ παριστάνει έλλειψη.

β. Αν είναι $|7z - \bar{z}| = 48$, να βρεθεί:

i. ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z.

ii. η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

251. Έστω Α, Β, Γ οι εικόνες των μη μηδενικών μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο αν και μόνο αν $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$.

252. Δίνεται η εξίσωση $z\bar{z} + 2\,\mathrm{Re}(z - zi) + 1 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί με εικόνες τα σημεία ενός κύκλου C.

β. Αν z_1, z_2 είναι δύο λύσεις της εξίσωσης, τότε $|z_1 - z_2| \leqslant 2$.

γ. Αν για δύο λύσεις z_1, z_2 της εξίσωσης ισχύει $|z_1 - z_2| = 2$ τότε $|z_1 + z_2|^2 = 8$.

253. Έστω οι μιγαδικοί z, w τέτοιοι ώστε: $|z+i| = 3$ και $w = \frac{1}{z-i} + \frac{2}{z+i} - \frac{2i}{z^2+1}$. Να απόδειξε ότι:

α. $|w| = 1$.

β. $\left|\frac{3\bar{z}}{w} - zi\right| = 8$.

γ. Να βρεθούν οι z, w ώστε οι εικόνες τους και η αρχή των αξόνων να είναι συνευθειακά σημεία.

δ. $\min|z - w| = \sqrt{\frac{11}{3}}$ και $\max|z - w| = 5$.

254. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί: $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \frac{2 - \overline{z_1}}{2 + \overline{z_1}}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι: $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $z_2 - z_1 = 1$.

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z_1.

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να υπολογιστεί ο z_1 και να αποδείξετε ότι $(z_1 + 1 + i)^{20} - (\overline{z_1} + 1 - i)^{20} = 0$.

255. Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 και ο ακέραιος $\nu > 1$, ώστε $z_1^\nu = 2 + i$ και $z_2^\nu = 1 + 2i$.

α. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w = \frac{z_1}{z_2}$ δεν είναι πραγματικός αριθμός.

β. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $z = \frac{w + 1}{w - 1}$, όπου w ο μιγαδικός του προηγούμενου ερωτήματος, είναι φανταστικός αριθμός.

γ. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παράστασης $f(c) = |c + w| + |c - w|$, $c \in \mathbb{C}$.

256. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $|z| = 4$ και $w = \frac{z - 8}{z - 2}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $|w| = 2$.

β. Ο μιγαδικός $w_1 = \frac{w^2 + 4}{w}$ είναι πραγματικός αριθμός.

257. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \frac{25(\lambda + i)}{4 + 3i}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

β. Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z με το μικρότερο μέτρο.

γ. Για τον μιγαδικό του ερωτήματος (β) να βρείτε κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $w = z + \frac{\mu}{z} \in \mathbb{R}$.

258. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί $z \notin \mathbb{R}$ ώστε $\lambda z + \bar{z} = |z|$.

α. Να δείξετε ότι $\lambda = 1$.

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

γ. Να βρείτε το $\min|z - i|$.

δ. Να δείξετε ότι $z^3 \in \mathbb{R}$.

259. Έστω z_1, z_2, z_3 μιγαδικοί αριθμοί διαφορετικοί ανά δύο για τους οποίους ισχύουν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Να δείξετε ότι:

α. $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$.

β. $z_1 z_2 z_3 \neq 0$.

γ. $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$.

δ. $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

ε. $(z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) \in \mathbb{R}$.

στ. $z_1^{13} + z_2^{13} + z_3^{13} = 0$.

ζ. Οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

260. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύει η σχέση $z + 2w = 4 + 4i$.

α. Να βρείτε τους z, w σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. ο z είναι πραγματικός και ο w είναι φανταστικός.

ii. ο w είναι ο συζυγής του z.

β. Αν η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία $\varepsilon: y = x + 2$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του w κινείται δε μια άλλη ευθεία, παράλληλη προς την ε.

γ. Αν η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο διαγράφει την ευθεία $\eta: y = x - 1$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|w - i|$.

261. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(z_3)$ και $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3} = 6i$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{1}{\bar{z}_1} + \frac{1}{\bar{z}_2} + \frac{1}{\bar{z}_3} = -6i$.

β. οι αριθμοί z_1, z_2, z_3 είναι φανταστικοί.

γ. αν $\mathrm{Im}(z_1) = 2\,\mathrm{Im}(z_2) = 3\,\mathrm{Im}(z_3)$, να βρείτε τους αριθμούς z_1, z_2, z_3.

262. Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει η σχέση $z\bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$.

α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $|z - i| = 1$.

β. Αν $w = \frac{1}{z}$, να βρείτε:

i. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w.

ii. τον μιγαδικό z για τον οποίο το $|w|$ γίνεται ελάχιστο.

263. Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = |z + 2i|$, $z \in \mathbb{C}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(\bar{z}) = |iz + 2|$ και $f(-z) = f(\bar{z})$.

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, όταν ισχύει $f(1 + i + z) = f(2 + 3i + z)$.

γ. Εάν ισχύει η ισότητα $f^2(z) + f^2(\bar{z}) = 10$, να δείξετε ότι $|z| = 1$.

δ. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $f(z) = f(\bar{z})$, τότε και μόνο τότε $z \in \mathbb{R}$.

ε. Να βρεθεί ο μιγαδικός z όταν ισχύει

$$z + f(z - 2i) = f^2(1 - i) + if(i).$$

264. Δίνεται η μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής $u = f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ για την οποία ισχύει $2f(z) + f(1 - z) = 3z^2 - 7z + 14$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(z) = z^2 - 5z + 6$, $z \in \mathbb{C}$.

β. Να βρεθούν τα $\text{Re}(f(z))$ και $\text{Im}(f(z))$.

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(z) = -5z + 9 + 4i$.

δ. Να λυθεί η εξίσωση $f(z) = 5 - 4z$ και να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο.

ε. Να λυθεί η ανίσωση $f(z) > 0$.

στ. Να αποδείξετε ότι $f(z)f(\bar{z}) > 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

265. Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = (3 + 4i)z + i$, $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\text{Re}(f(z)) = 3\,\text{Re}(z) - 4\,\text{Im}(z)$ και

$\text{Im}(f(z)) = 4\,\text{Re}(z) + 3\,\text{Im}(z) + 1$.

β. αν η εικόνα του $f(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$, τότε η εικόνα του z κινείται επίσης σε ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ. αν Α, Β, Γ, Δ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z, i, f(z), f(i)$ αντίστοιχα, τότε:

i. $f(z) - f(i) = (3 + 4i)(z - i)$.

ii. $(\Gamma\Delta) = 5(\text{AB})$.

266. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|z - 2| = 1$ και $|w - 2i| = 1$.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z, w.

β. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί z, w τέτοιοι ώστε $z = w$.

γ. Να αποδείξετε ότι $|z| \leqslant 3$ και $|w| \leqslant 3$.

δ. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

267. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi \neq 0$ με $x, y \in \mathbb{R}$ και $w = \frac{1}{z} - \frac{z}{\bar{z}}$.

α. Να γράψετε τον w στην μορφή $\alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β. Να βρείτε τους μιγαδικούς z με $|z| = 1$ και $w \in \mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z|^2\,\text{Re}(w) = 2\,\text{Im}^2(z)$.

268. Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \bar{z} + |z|$, $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

β. $f(z) \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $z \in \mathbb{R}$.

γ. αν $|z| \leqslant 1$, τότε $|f(z)| \leqslant 2$.

δ. δεν υπάρχει μιγαδικός αριθμός z, τέτοιος ώστε $f(z) = 2z - 3i$.

269. Έστω ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει η σχέση $|z-9|=|z-1|$.
   α. Να βρείτε το $|z|$.
   β. Αν για το μιγαδικό w ισχύει η σχέση $(w-5i)(\bar{w}+5i)=1$, τότε:
      i. να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w.
      ii. να αποδείξετε ότι: $1 \leqslant |z-w| \leqslant 9$.

270. Α. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=(3\lambda-5)+(\mu-2)i$ και $z_2=(2\mu-1)+(\lambda-1)i$. Αν $A(w_1)$ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w_1=z_1+z_2$ η οποία κινείται πάνω στην ευθεία $\varepsilon_1: y=x+2$, ενώ $B(w_2)$ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w_2=z_1-z_2$ η οποία κινείται πάνω στην ευθεία $\varepsilon_2: y=x$, να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί μ, λ.
   Β. Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί για τους οποίους ισχύει η ισότητα $|z_1|=|z_2|=1$, να δείξετε ότι $|z_1+z_2+z_1z_2-1|=|z_1+z_2-z_1z_2+1|$.

271. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο.
   β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z=\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$ για $\alpha=0$ και $\alpha=2$ αντίστοιχα.
      i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2.
      ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(z_1)^{2\nu}=(-z_2)^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν.

272. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύει $8z_1^3=z_2^3=8$.
   α. Να αποδείξετε ότι $\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_1}$ και $\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_2}$.
   β. Να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2|=\left|2z_1+\dfrac{1}{2}z_2\right|$.
   γ. Να αποδείξετε ότι $1 \leqslant |z_1+z_2| \leqslant 3$.

273. Α. Έστω $A(z_1)$ είναι η εικόνα του μιγαδικού z_1, ο οποίος κινείται πάνω σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=2$. Αν $B(z_2)$ είναι η εικόνα του μιγαδικού z_2 και ισχύει $z_2=i\overline{z_1}-\dfrac{4}{z_1}$, τότε να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z_2 κινείται επίσης σε κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.
   Β. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\dfrac{2-\overline{z_1}}{2+\overline{z_1}}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2-z_1 \in \mathbb{R}$.
      α. Να αποδειχθεί ότι $z_2-z_1=1$.

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να αποδειχθεί ότι $(z_1 + 1 + i)^{20} - (\overline{z_1} + 1 - i)^{20} = 0$.

274. Α. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύει $\frac{|z_1|}{\sqrt{2}} = \frac{|z_2|}{2} = \frac{|z_3|}{2\sqrt{2}}$. Αν τα σημεία $A(z_1)$, $B(z_2)$ και $\Gamma(z_3)$ είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και z_3 αντίστοιχα και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$, να αποδείξετε ότι $\frac{\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})}{\mathrm{Re}(z_2\overline{z_3})} = \frac{1}{2}$.

Β. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύει $|z_1 + z_2|^2 - 2[1 + \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})] + 3 \leqslant 2(2|z_1| + 3|z_2| - 6)$.

α. Να υπολογίσετε τα μέτρα των μιγαδικών z_1, z_2.

β. Δίνεται ο μιγαδικός $w = \frac{3z_1}{2z_2} - \frac{2z_2}{3z_1}$. Να αποδείξετε ότι ο w είναι φανταστικός αριθμός.

275. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύουν $|w| = 1$ και $z = 4\sqrt{2}w + 1 - i$.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

β. Να βρείτε ποιοι από τους μιγαδικούς z του παραπάνω γεωμετρικού τόπου έχουν το μεγαλύτερο και μικρότερο μέτρο και ποια είναι τα αντίστοιχα μέτρα.

276. Α. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύουν $z_1 + z_2 = 4 + 4i$ και $2z_1 - \overline{z_2} = 5 + 5i$. Να βρεθούν οι μιγαδικοί z_1, z_2.

Β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν $|z - 1 - 3i| \leqslant \sqrt{2}$ και $|w - 3 - i| \leqslant \sqrt{2}$, τότε:

α. να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w ώστε $z = w$.

β. να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

277. Α.

α. Να λύσετε την εξίσωση $z^2 = i\bar{z}$.

β. Αν Α, Β και Γ είναι οι εικόνες των μη μηδενικών λύσεων της παραπάνω εξίσωσης, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Β. Δίνεται η εξίσωση $4z^2 + 4\lambda z + 4\lambda - 3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες συζυγείς μιγαδικές.

β. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ, αν ο μιγαδικός $z_0 = -1 + \frac{1}{2}i$ είναι ρίζα της παραπάνω εξίσωσης.

278. Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{z+2i}{z+1}$ με $z \neq -1$.

α. Να βρεθεί ο μιγαδικός z ώστε $f(z) = 3 - 2i$.

β. Αν ισχύει $\text{Re}(f(z)) = 0$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z.

γ. Αν ισχύει $|f(1+2i+z)| = 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z.

Β. Αν η εικόνα του μιγαδικού z_1 κινείται πάνω στον κύκλο $|z+1+2i| = 1$, ενώ η εικόνα του μιγαδικού z_2 κινείται πάνω στον κύκλο $|z-3-i| = 2$, να υπολογίσετε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του μέτρου της διαφοράς $z_1 - z_2$.

279. Αν z μιγαδικός με $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$, τότε:

α. αν $\text{Im}(z) = 1$, να βρείτε το $\text{Re}(z)$.

β. να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο.

γ. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z|$.

δ. αν z_1, z_2 μιγαδικοί με $\text{Re}\left(\frac{1}{z_1}\right) = \text{Re}\left(\frac{1}{z_2}\right) = \frac{1}{4}$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|z_1 - z_2|$.

280. α. Να περιγράψετε γεωμετρικά στο σύνολο $\mathbb{C}$, το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τις σχέσεις $|z-i| = 1$ και $\text{Im}(z) \geqslant 1$.

β. Να δείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στο σύνολο $\mathbb{C}$, τότε η εικόνα του μιγαδικού $w = \frac{1}{2}\left(z - i - \frac{1}{z-i}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα y'y.

281. Έστω $z \in \mathbb{C} - \{-i\}$ και $w = \frac{iz+1}{z+i}$.

α. Αν η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι εξωτερικό σημείο του μοναδιαίου κύκλου, να δείξετε ότι $\text{Im}(z) < 0$.

β. Αν η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο δεν είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = 2$, να βρείτε που βρίσκεται η εικόνα του w.

γ. Αν $w \in \mathbb{R}$, να βρείτε που βρίσκεται η εικόνα του z.

282. Για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν αντιστοίχως οι σχέσεις $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 1$ και $(w-3)^7 = \frac{1-2i}{2-i}$.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C_1 των εικόνων των μιγαδικών z.

β. Να βρείτε τη γραμμή C_2 που βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών w.

γ. Αν $M(z_1) \in C_1$ και $M'(z_2) \in C_2$, να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$.

283. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - z + \alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $\alpha > \frac{1}{4}$.

β. Αν $|z| = 1$, τότε:

i. να βρείτε το α.

ii. να λύσετε την εξίσωση.

iii. να βρείτε που βρίσκονται οι εικόνες του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $(z - z_1)^5 - (z - z_2)^5 = 0$.

284. Για τους μιγαδικούς z, w ισχύει $w = \frac{i}{\bar{z}}$.

α. Αν ισχύει $|w + 1| = |w|$ (1), να δείξετε ότι $|z - i| = 1$.

β. Αν ισχύει $|w - i| = \sqrt{2}$ (2), να δείξετε ότι $|z + 1| = \sqrt{2}$.

γ. Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους C_1 και C_2 των εικόνων M των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει αντίστοιχα η σχέση (1) και (2).

δ. Αν οι εικόνες M_1 και M_2 των μιγαδικών z_1 και z_2 κινούνται στους C_1 και C_2 αντίστοιχα, να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z_1 - z_2|$.

285. Έστω ο μιγαδικός z.

α. Να δείξετε ότι $|z(1 + i) - 2| = \sqrt{2}|z - 1 + i|$.

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων z για τους οποίους ισχύει $|z(1 + i) - 2| = \sqrt{3}|iz|$ (1).

γ. Να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή του μέτρου του μιγαδικού z που επαληθεύει την (1).

δ. Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 επαληθεύουν την (1), να βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|z_1 - z_2|$.