ΗΛΙΑΣΚΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

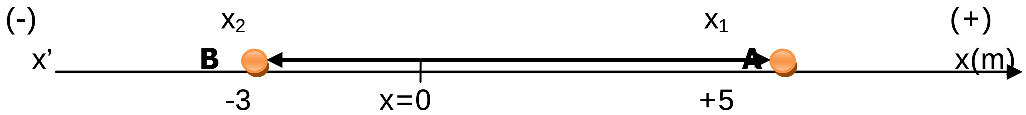
ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΥΨΗΛΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Θέση, μετατόπιση και διάστημα

- Όταν ένα σημειακό αντικείμενο κινείται ευθύγραμμα, για να μελετήσουμε την κίνησή του θεωρούμε σαν **σύστημα αναφοράς** έναν άξονα χ΄χ. Στην αρχή του άξονα (χ=0) θεωρούμε ότι βρίσκεται ο ακίνητος παρατηρητής.

- Για να προσδιορίσουμε την θέση του αντικειμένου που κινείται ευθύγραμμα χρησιμοποιούμε το **διάνυσμα θέσης** $\vec{x}$,το οποίο έχει αρχή την αρχή του άξονα και τέλος το σημειακό αντικείμενο. Συνήθως χρησιμοποιούμε την <u>αλγεβρική τιμή του διανύσματος θέσης</u> που την ονομάζουμε **θέση** του αντικειμένου. Για παράδειγμα όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα η θέση του αντικειμένου όταν βρίσκεται στο σημείο Α είναι x_1=+5m και η θέση του όταν βρίσκεται στο σημείο Β είναι x_2=-3m.



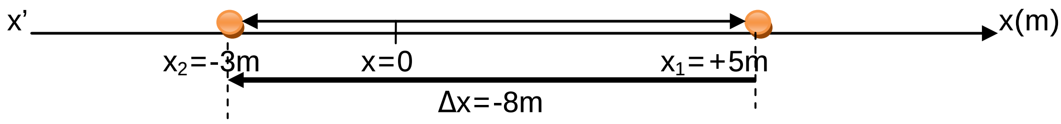
- Η **μετατόπιση** $\Delta\vec{x}$ του αντικειμένου είναι ένα διάνυσμα το οποίο έχει για αρχή την αρχική του θέση και τέλος την τελική του θέση κινητού και υπολογίζεται από την σχέση:

$$\boldsymbol{\Delta\vec{x} = \vec{x_2} - \vec{x_1}}$$

Συνήθως χρησιμοποιούμε την <u>αλγεβρική τιμή του διανύσματος της μετατόπισης</u> η οποία υπολογίζεται αν αφαιρέσουμε από την τελική θέση την αρχική θέση.

$$\mathbf{\Delta x = x_2 - x_1}$$

Το πρόσημο της μετατόπισης μας δείχνει την κατεύθυνσή της. Για παράδειγμα αν το σώμα ήταν αρχικά στην θέση Α (x_1=+5m) και μετακινήθηκε μέχρι τη θέση Β (x_2=-3m), η αλγεβρική τιμή της μετατόπισής του θα είναι Δx=(-3)-(+5)=-3-5=-8m. Αυτό σημαίνει ότι το σώμα μετατοπίστηκε κατά 8m προς την αρνητική φορά του άξονα.



❑ Το **διάστημα S** είναι μονόμετρο μέγεθος και ισούται με το μήκος της τροχιάς άρα είναι πάντα ένας θετικός αριθμός. Το διάστημα θα ταυτίζεται με το με το μέτρο της μετατόπισης μόνο στη περίπτωση της ευθύγραμμης κίνησης που γίνεται προς ορισμένη κατεύθυνση.

Η έννοια της μέσης ταχύτητας στην ευθύγραμμη κίνηση

❑ Η μέση ταχύτητα αναφέρεται σε μια χρονική διάρκεια Δt και μας δείχνει τον ρυθμό μεταβολής της θέσης στη διάρκεια αυτή. Είναι διανυσματικό μέγεθος και ορίζεται ως το πηλίκο της μετατόπισης $\boldsymbol{\Delta\vec{x}}$ προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια Δt.

$$\vec{\upsilon} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} \quad \textbf{ή} \quad \vec{\upsilon} = \frac{\vec{x_2} - \vec{x_1}}{t_2 - t_1}$$

❑ Η κατεύθυνση του διανύσματος της μέσης ταχύτητας είναι ίδια με την κατεύθυνση του διανύσματος της μετατόπισης. Στις ευθύγραμμες κινήσεις συνήθως χρησιμοποιούμε την αλγεβρική τιμή της μέσης ταχύτητας η οποία υπολογίζεται από την αλγεβρική σχέση:

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \textbf{ή} \quad \upsilon = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Η μονάδα της ταχύτητας στο S.I είναι το 1m/s.

❑ Το πρόσημο της ταχύτητας (το οποίο προφανώς ταυτίζεται με το πρόσημο της μετατόπισης) μας δείχνει τη φορά της κίνησης. Για παράδειγμα αν μια μετατόπιση Δx=+30m πραγματοποιηθεί σε χρόνο Δt=6s, η μέση ταχύτητα σε αυτή τη χρονική διάρκεια θα έχει αλγεβρική τιμή υ=+5m/s που σημαίνει ότι η κίνηση γίνεται προς τη θετική φορά του άξονα. Αν η κίνηση γινόταν προς την αρνητική φορά του άξονα θα ήταν Δx=-30m, οπότε και η μέση ταχύτητα θα έχει αλγεβρική τιμή υ=-5m/s.

Η έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας στην ευθύγραμμη κίνηση

❑ Η στιγμιαία ταχύτητα αναφέρεται σε μια χρονική στιγμή και είναι ίση με το όριο στο οποίο τείνει η μέση ταχύτητα όταν η χρονική διάρκεια στην οποία υπολογίζεται η μετατόπιση τείνει στο μηδέν.

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Δηλαδή πρακτικά η στιγμιαία ταχύτητα είναι μια «μέση» ταχύτητα που όμως υπολογίζεται σε μια απειροελάχιστη χρονική διάρκεια γύρω από μια χρονική στιγμή. Μας δείχνει τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της θέσης (δηλαδή πόσο γρήγορα κινούμαστε κάποια στιγμή) και είναι ένα σαφώς πιο χρήσιμο μέγεθος από την μέση ταχύτητα. Όταν κινούμαστε με αυτοκίνητο η ένδειξη του κοντέρ μας δείχνει την στιγμιαία ταχύτητα. Η κατεύθυνση τη στιγμιαίας ταχύτητας μας δείχνει την κατεύθυνση της κίνησης και αυτό δηλώνεται επίσης και από το πρόσημο της αλγεβρικής της τιμής όπως συμβαίνει και με τη μέση ταχύτητα.

Η ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

❑ Η **ευθύγραμμη ομαλή κίνηση** έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

i. Είναι μια ευθύγραμμη κίνηση η οποία γίνεται προς μια ορισμένη κατεύθυνση και το κινητό σε ίσους χρόνους (όσο μικρής διάρκειας και αν είναι) διανύει ίσες μετατοπίσεις.
ii. Η μέση ταχύτητα είναι η ίδια ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλη ή μικρή είναι η χρονική διάρκεια στην οποία υπολογίζεται και άρα να είναι σταθερή.
iii. Η στιγμιαία ταχύτητα είναι επίσης σταθερή και διαρκώς ίση με τη μέση ταχύτητα. Για αυτό το λόγο στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση δεν κάνουμε διάκριση ανάμεσα στη μέση και στη στιγμιαία ταχύτητα.

❑ Ορίζουμε λοιπόν σαν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση την κίνηση που γίνεται με σταθερή ταχύτητα, δηλαδή: $\vec{\boldsymbol{\upsilon}} = \boldsymbol{\sigma\tau\alpha\theta}.$

❑ Για να υπολογίσουμε την σταθερή ταχύτητα της κίνησης χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\boldsymbol{\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

❑ Για να υπολογίσουμε την μετατόπιση σε μια χρονική διάρκεια χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\boldsymbol{\Delta x = \upsilon . \Delta t}$$

❑ Η εξίσωση της κίνησης x=x(t) μας δίνει τη θέση του κινητού την οποιαδήποτε χρονική στιγμή και προκύπτει ως εξής:

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \Leftrightarrow x - x_0 = \upsilon.(t - t_0) \Leftrightarrow \mathbf{x = x_0 + \boldsymbol{\upsilon}.(t - t_0)}$$

Στη σχέση αυτή τα διάφορα γράμματα έχουν τον εξής συμβολισμό.
x_0: η αρχική θέση (συνήθως x_0=0).
t_0: η αρχική χρονική στιγμή (συνήθως t_0=0).
υ: η αλγεβρική τιμή της σταθερής ταχύτητας.
t: μια μελλοντική χρονική στιγμή.
x: η θέση τη χρονική στιγμή t.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Η εξίσωση κίνησης σε μια ευθύγραμμη κίνηση είναι x=3+10t (S.I).
α) τι είδους κίνηση εκτελεί το σώμα;
β) ποια είναι η θέση τη χρονική στιγμή t=5s;
γ) ποια χρονική στιγμή βρίσκεται στη θέση x=63m;
δ) ποια είναι η μετατόπιση από τη χρονική στιγμή t_1=2s μέχρι τη χρονική στιγμή t_2=8s;
ε) ποια είναι η μέση ταχύτητα στην παραπάνω χρονική διάρκεια;

Λύση

α) Από την εξίσωση κίνησης καταλαβαίνουμε ότι το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα υ=+10m/s και ότι αρχικά t_0=0 ήταν στη θέση x_0=+3m.

β) x=3+10.5 ⟺ x=53m

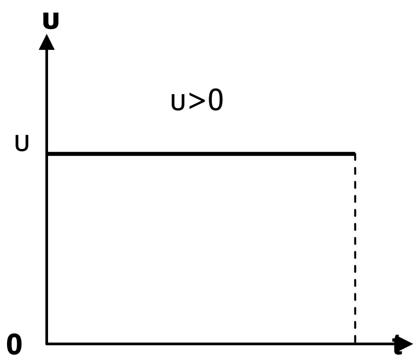
γ) 63=3+10.t ⟺ t=6s

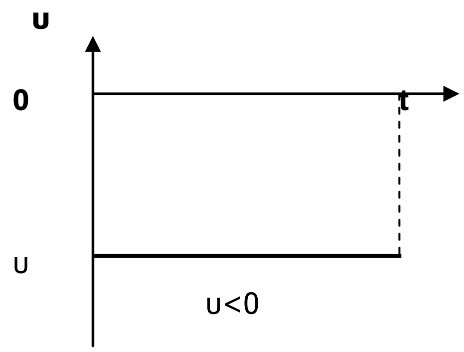
δ) x_1=3+10.2 ⟺ x_1=23m
x_2=3+10.8 ⟺ x_2=83m
$\Delta x = x_2 - x_1$ ⟺ Δx=83m-23m ⟺ Δx=60m.

ε) $\boldsymbol{\upsilon} = \frac{\boldsymbol{\Delta x}}{\boldsymbol{\Delta t}} = \frac{\mathbf{60}\boldsymbol{m}}{\mathbf{6}\boldsymbol{s}} =$ 10m/s
Παρατηρούμε ότι η μέση ταχύτητα σε μια οποιαδήποτε χρονική διάρκεια ταυτίζεται με τη σταθερή ταχύτητα του σώματος, όπως προβλέπει η θεωρία.

Η πιο απλή μορφή που μπορεί να πάρει η εξίσωση κίνησης είναι η $\mathbf{x} = \boldsymbol{\upsilon}.\boldsymbol{t}$ αν θεωρήσουμε προφανώς ότι οι αρχικές συνθήκες είναι t_0=0 και x_0=0.

- **Διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου**

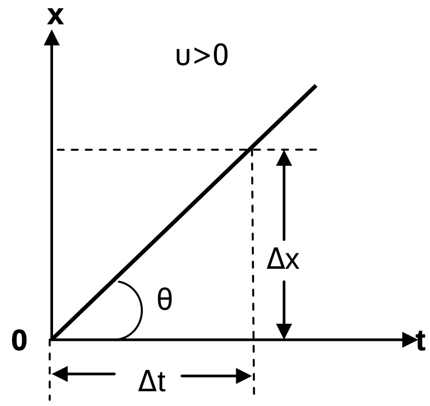


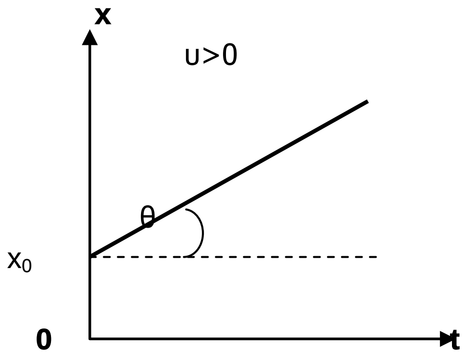


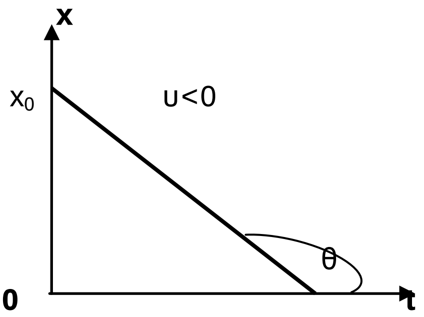
<u>Παρατήρηση:</u> Το εμβαδό που σχηματίζεται στα παραπάνω διαγράμματα ισούται με την αλγεβρική τιμή της μετατόπισης.

- **Διάγραμμα θέσης – χρόνου**

Το διάγραμμα θέσης – χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι ευθεία γραμμή (ανηφορική ή κατηφορική) η οποία αρχίζει από οποιοδήποτε σημείο του άξονα x'x ανάλογα με την αρχική θέση του κινητού. Μερικές περιπτώσεις φαίνονται παρακάτω.







<u>Παρατήρηση:</u> Στα παραπάνω διαγράμματα η κλίση της γραμμής εκφράζει την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας. Δηλαδή: κλίση = εφθ = $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ =υ. Αν η γραμμή είναι ανηφορική έχει θετική κλίση άρα υ>0, ενώ αν η γραμμή είναι κατηφορική έχει αρνητική κλίση άρα υ<0.

Η έννοια της μέσης επιτάχυνσης στην ευθύγραμμη κίνηση

- Το διάνυσμα της ταχύτητας μπορεί να αλλάζει είτε μόνο ως προς το μέτρο του, είτε μόνο ως προς την κατεύθυνσή του, είτε ως προς μέτρο και κατεύθυνση ταυτόχρονα. Φυσικά στις ευθύγραμμες κινήσεις σταθερής φοράς μπορεί να αλλάξει μόνο το μέτρο της ταχύτητας, δηλαδή το σώμα μπορεί να πηγαίνει ολοένα και πιο γρήγορα ή πιο αργά. Σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε **επιτάχυνση** και η κίνηση ονομάζεται επιταχυνόμενη ή μεταβαλλόμενη.

❑ Η **μέση επιτάχυνση** αναφέρεται σε μια χρονική διάρκεια Δt και μας δείχνει τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας στη διάρκεια αυτή. Είναι διανυσματικό μέγεθος και ορίζεται ως το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητας $\Delta\vec{\upsilon}$ προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια Δt.

$$\overrightarrow{\alpha_\mu} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \overrightarrow{\alpha_\mu} = \frac{\overrightarrow{\upsilon_2} - \overrightarrow{\upsilon_1}}{t_2 - t_1}$$

❑ Η κατεύθυνση του διανύσματος της μέσης επιτάχυνσης είναι ίδια με την κατεύθυνση του διανύσματος της μεταβολής της ταχύτητας. Στις ευθύγραμμες κινήσεις συνήθως χρησιμοποιούμε την αλγεβρική τιμή της μέσης επιτάχυνσης η οποία υπολογίζεται από την αλγεβρική σχέση:

$$\alpha_\mu = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \alpha_\mu = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1}$$

Η μονάδα της επιτάχυνσης στο S.I είναι το $1 m/s^2$.

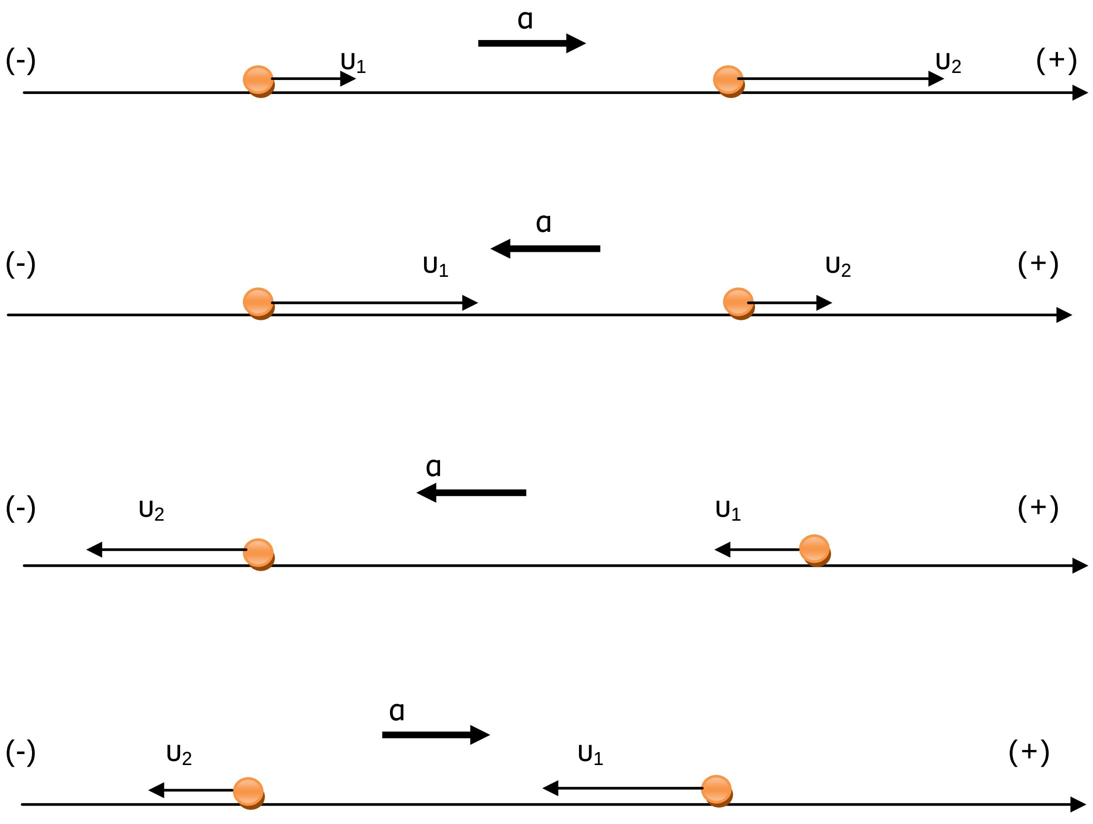
❑ Το πρόσημο της επιτάχυνσης (το οποίο προφανώς ταυτίζεται με το πρόσημο της μεταβολής της ταχύτητας) μας δείχνει αν το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται οπότε έχουμε επιταχυνόμενη κίνηση ή ελαττώνεται οπότε έχουμε επιβραδυνόμενη κίνηση.

Η έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας στην ευθύγραμμη κίνηση

❑ Η **στιγμιαία επιτάχυνση** αναφέρεται σε μια χρονική στιγμή και είναι ίση με το όριο στο οποίο τείνει η μέση επιτάχυνση όταν η χρονική διάρκεια στην οποία υπολογίζεται η μεταβολή της ταχύτητας τείνει στο μηδέν.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$$

❑ Δηλαδή πρακτικά η στιγμιαία επιτάχυνση είναι μια «μέση» επιτάχυνση που όμως υπολογίζεται σε μια απειροελάχιστη χρονική διάρκεια γύρω από μια χρονική στιγμή. Μας δείχνει τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας και είναι ένα σαφώς πιο χρήσιμο μέγεθος από την μέση επιτάχυνση. Η κατεύθυνση τη στιγμιαίας επιτάχυνσης στην ευθύγραμμη κίνηση μας δείχνει αν η κίνηση είναι επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη. Πιο αναλυτικά αν η επιτάχυνση έχει το ίδιο πρόσημο με την ταχύτητα άρα και την ίδια κατεύθυνση με αυτή η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, ενώ αν η επιτάχυνση έχει αντίθετο πρόσημο με την ταχύτητα άρα και αντίθετη κατεύθυνση με αυτή, η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη. Αυτά φαίνονται καλύτερα στα παρακάτω σχήματα.



Η ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση

❑ Η **ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση** είναι μια κίνηση με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

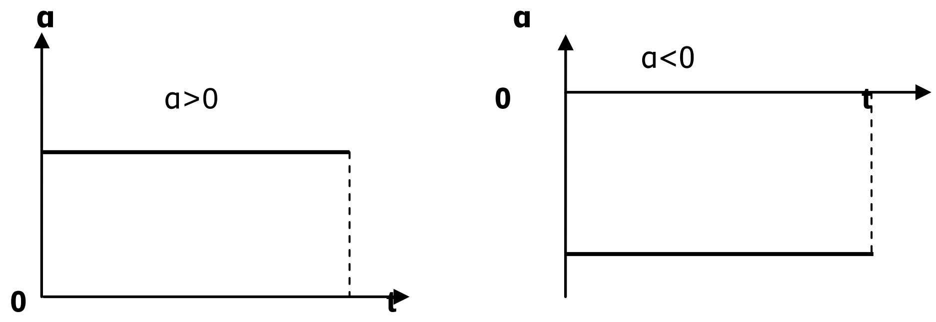
i. Είναι ευθύγραμμη κίνηση η οποία γίνεται προς μια ορισμένη κατεύθυνση.
ii. Το κινητό σε ίσους χρόνους (όσο μικρής διάρκειας και αν είναι) παθαίνει ίσες μεταβολές στην ταχύτητά του.
iii. Η μέση επιτάχυνση είναι η ίδια ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλη ή μικρή είναι η χρονική διάρκεια στην οποία υπολογίζεται και άρα να είναι σταθερή.
iv. Η στιγμιαία επιτάχυνση είναι σταθερή και διαρκώς ίση με τη μέση επιτάχυνση. Για αυτό το λόγο στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση δεν κάνουμε διάκριση ανάμεσα στη μέση και στη στιγμιαία επιτάχυνση.

❑ Ορίζουμε λοιπόν σαν ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση την κίνηση που γίνεται με σταθερή επιτάχυνση, δηλαδή: $\vec{\alpha} = \text{σταθ.}$

❑ Για να υπολογίσουμε την αλγεβρική τιμή της σταθερής επιτάχυνσης της κίνησης χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}}$$

❑ **Διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου**



<u>Παρατήρηση:</u> Το εμβαδό που σχηματίζεται στα παραπάνω διαγράμματα ισούται με την αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ταχύτητας Δυ.

❑ Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας υ=υ(t) μας δίνει τη αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του κινητού την οποιαδήποτε χρονική στιγμή και προκύπτει ως εξής:

$$\alpha = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t - t_0} \Leftrightarrow \upsilon - \upsilon_0 = \alpha.(t - t_0) \Leftrightarrow \boldsymbol{\upsilon = \upsilon_0 + \alpha.(t - t_0)}$$

Στη σχέση αυτή τα διάφορα γράμματα έχουν τον εξής συμβολισμό.
$\boldsymbol{\upsilon_0}$: η αλγεβρική τιμή της αρχικής ταχύτητας (αρκετές φορές μπορεί να είναι υ_0=0).
$\boldsymbol{t_0}$: η αρχική χρονική στιγμή (συνήθως t_0=0).
α: η αλγεβρική τιμή της σταθερής επιτάχυνσης.
t: μια μελλοντική χρονική στιγμή.
υ: η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t.

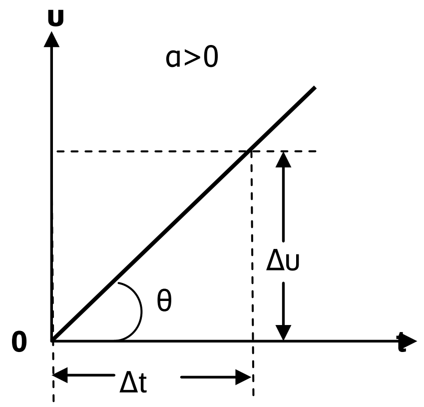
Οι πιο απλές μορφές που μπορεί να πάρει η εξίσωση της ταχύτητας είναι οι εξής:

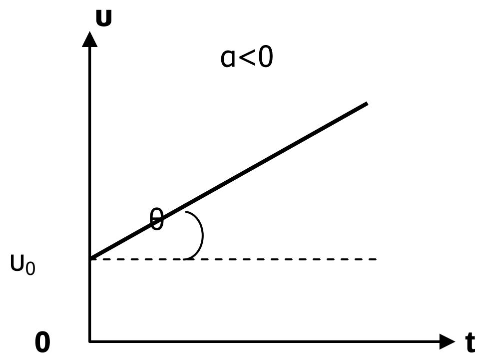
$$\boldsymbol{v = v_0 + \alpha.t} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{v = \alpha.t}$$

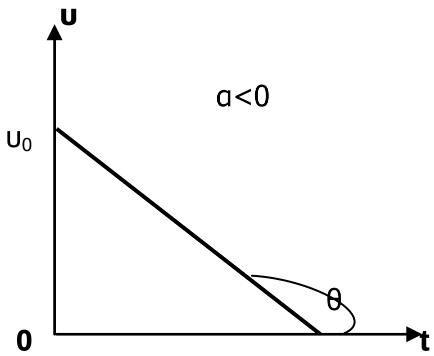
<u>Παρατήρηση:</u> Στην περίπτωση της ευθύγραμμης ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης είναι συνήθως υ_0>0 και α<0, οπότε η εξίσωση της ταχύτητας μπορεί να γραφεί και ως $\boldsymbol{v = v_0 - |\alpha|.t}$

- **Διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου**

Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση είναι ευθεία γραμμή (ανηφορική ή κατηφορική) η οποία αρχίζει από οποιοδήποτε σημείο του άξονα της ταχύτητας ανάλογα με την αρχική ταχύτητα του κινητού. Μερικές περιπτώσεις φαίνονται παρακάτω.







<u>Παρατήρηση:</u> Στα παραπάνω διαγράμματα η κλίση της γραμμής εκφράζει την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης. Δηλαδή: κλίση = εφθ = $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \alpha$. Αν η γραμμή είναι ανηφορική έχει θετική κλίση άρα α>0, ενώ αν η γραμμή είναι κατηφορική έχει αρνητική κλίση άρα α<0.

- Για να υπολογίσουμε την μετατόπιση σε μια χρονική διάρκεια χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\mathbf{\Delta x = \upsilon_0 . \Delta t + \frac{1}{2} . \alpha . \Delta t^2} \quad \mathbf{ή} \quad \mathbf{\Delta x = \frac{1}{2} . \alpha . \Delta t^2}$$

Στη σχέση αυτή τα διάφορα γράμματα έχουν τον εξής συμβολισμό.
υ_0: η αλγεβρική τιμή της αρχικής ταχύτητας (αρκετές φορές μπορεί να είναι υ_0=0).
α: η αλγεβρική τιμή της σταθερής επιτάχυνσης.
$\Delta x = x - x_0$: η αλγεβρική τιμή της μετατόπισης
$\Delta t = t - t_0$: η χρονική διάρκεια στην οποία διανύεται η μετατόπιση Δx

Αν τη στιγμή που κοιτάξουμε το χρονόμετρό μας είναι $t_0=0$ και δούμε το κινητό να διέρχεται από την αρχή του άξονα $x_0=0$, τότε ο παραπάνω τύπος της μετατόπισης γράφεται:

$$\mathbf{x = \upsilon_0 . t + \frac{1}{2} . \boldsymbol{\alpha} . t^2} \quad \textbf{ή} \quad \mathbf{x = \frac{1}{2} . \boldsymbol{\alpha} . t^2}$$

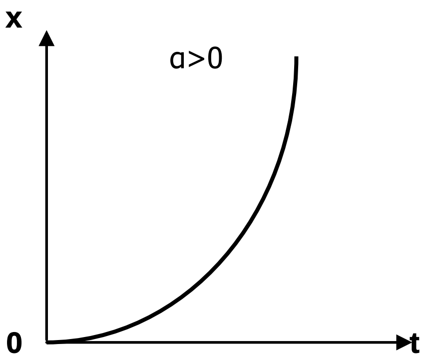
και αποτελεί την εξίσωση κίνησης x=x(t) για την ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

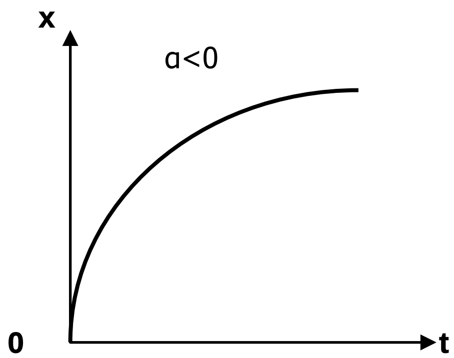
<u>Παρατήρηση:</u> Στην περίπτωση της ευθύγραμμης ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης είναι συνήθως $\upsilon_0>0$ και $\alpha<0$, οπότε ο τύπος της μετατόπισης και η εξίσωση της κίνησης γράφονται

$$\mathbf{\Delta x = \upsilon_0 . \Delta t - \frac{1}{2} . |\alpha| . \Delta t^2}$$

$$\mathbf{x = \upsilon_0 . t - \frac{1}{2} . |\alpha| . t^2}$$

- **Διάγραμμα θέσης – χρόνου**





Ολικός χρόνος και ολική μετατόπιση στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση

Έστω ότι ένα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και θέλουμε να βρούμε σε πόσο χρόνο θα σταματήσει (ολικός χρόνος, $t_{ολ}$). Προφανώς τη στιγμή αυτή η ταχύτητα του σώματος θα είναι μηδέν. Άρα:

$$\upsilon = \upsilon_0 - |\alpha| . t \Leftrightarrow 0 = \upsilon_0 - |\alpha| . t_{o\lambda} \Leftrightarrow |\alpha| . t_{o\lambda} = \upsilon_0 \Leftrightarrow \boldsymbol{t_{o\lambda}} = \frac{\boldsymbol{\upsilon_0}}{\boldsymbol{|\alpha|}}$$

Για να βρούμε τώρα την συνολική μετατόπιση του σώματος μέχρι να σταματήσει θα αντικαταστήσουμε στον τύπο της μετατόπισης $\Delta t = t_{ολ} = \frac{υ_0}{|α|}$.

$$\Delta x_{ολ} = υ_0 . \Delta t_{ολ} - \frac{1}{2} . |α| . \Delta t_{ολ}^2 \Leftrightarrow \Delta x_{ολ} = υ_0 . \left(\frac{υ_0}{|α|}\right) . - \frac{1}{2} . |α| . \left(\frac{υ_0}{|α|}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\Delta x_{ολ} = \frac{υ_0^2}{2α}}$$

Η έννοια της δύναμης

- Λέμε ότι πάνω σε ένα σώμα ενεργεί κάποια δύναμη κάθε φορά που αλλάζει η κινητική κατάσταση του σώματος, (δηλαδή αλλάζει το διάνυσμα της ταχύτητας οπότε και έχουμε επιτάχυνση) ή παραμορφώνεται το σώμα. Άρα δύναμη ονομάζουμε την οποιαδήποτε αιτία μπορεί να προκαλέσει τα εξής αποτελέσματα: επιτάχυνση και παραμόρφωση.

- Η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος και η μονάδα μέτρησής της στο S.I είναι το 1 Newton.

- Ελαστική παραμόρφωση λέγεται η παροδική παραμόρφωση, δηλαδή αυτή που παύει να υπάρχει μόλις σταματήσει να υπάρχει και η αιτία που την προκάλεσε. Σε αντίθετη περίπτωση η παραμόρφωση λέγεται πλαστική και είναι μόνιμη.

- Ο **νόμος του Hooke** μας λέει ότι όταν μια δύναμη προκαλεί μια ελαστική παραμόρφωση σε ένα σώμα (πχ. ελατήριο, λάστιχο), η παραμόρφωση αυτή είναι ανάλογη με το μέτρο της δύναμης που την προκάλεσε. Αν το σώμα που παραμορφώνεται ελαστικά είναι ένα ελατήριο, τότε ο νόμος του Hooke γράφεται:

$$\mathbf{F = k. \Delta l}$$

Όπου Δl είναι η παραμόρφωση του ελατηρίου και k είναι μια σταθερά η οποία εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ελατηρίου και ονομάζεται σταθερά του ελατηρίου

- Για να μετρήσουμε μια δύναμη στηριζόμαστε στο νόμο του Hooke. Στην πράξη χρησιμοποιούμε ένα ελατήριο στο ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένος ένας δείκτης, ο οποίος μπορεί να κινείται πάνω σε μια βαθμολογημένη κλίμακα. Η κατασκευή αυτή ονομάζεται **δυναμόμετρο**, μια παραλλαγή του οποίου είναι ο ζυγός με ελατήριο.

Συνισταμένη δύναμη - σύνθεση δυνάμεων

- Το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα (επιτάχυνση ή παραμόρφωση) που προκαλούν σε ένα σώμα πολλές δυνάμεις που ασκούνται ταυτόχρονα, μπορεί να προκαλέσει μια δύναμη από μόνη της. Αυτή ονομάζεται **συνισταμένη δύναμη**, ενώ οι δυνάμεις που αντικαθιστά ονομάζονται **συνιστώσες** της.

- Η συνισταμένη δύο ή περισσότερων δυνάμεων βρίσκεται αν προσθέσουμε τις συνιστώσες δυνάμεις. Επειδή η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος, οι δυνάμεις προστίθενται διανυσματικά δηλαδή με διαφορετικό τρόπο από αυτόν που προσθέτουμε τους αριθμούς. Η διαδικασία αυτή με βάση την οποία βρίσκουμε την συνισταμένη πολλών δυνάμεων λέγεται **σύνθεση** των δυνάμεων.

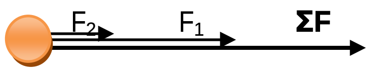
$$\mathbf{\Sigma\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \cdots}$$

Σύνθεση δύο συγγραμμικών δυνάμεων

- <u>Ομόρροπες δυνάμεις ($\varphi=0^0$)</u>

Αν οι δυνάμεις έχουν την ίδια κατεύθυνση, η συνισταμένη τους έχει την ίδια κατεύθυνση με αυτές και μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων τους.

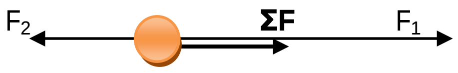
$\Sigma F=F_1+F_2$



- <u>Αντίρροπες δυνάμεις ($\varphi=180^0$)</u>

Αν οι δυνάμεις έχουν αντίθετες κατευθύνσεις, η συνισταμένη τους έχει την κατεύθυνση της μεγαλύτερης και μέτρο ίσο με τη διαφορά των μέτρων τους.

$\Sigma F=F_1-F_2$

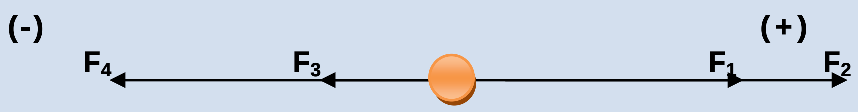


Σύνθεση πολλών συγγραμμικών δυνάμεων

Όταν θέλουμε να συνθέσουμε πολλές συγγραμμικές δυνάμεις θεωρούμε αυθαίρετα θετική και αρνητική φορά πάνω στην ευθεία των δυνάμεων και στην συνέχεια προσθέτουμε τις αλγεβρικές τους τιμές. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι θετικές δυνάμεις να προστίθενται και οι αρνητικές δυνάμεις να αφαιρούνται.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο σημειακό αντικείμενο του σχήματος ασκούνται οι παρακάτω δυνάμεις τα μέτρα των οποίων είναι $F_1=10N$, $F_2=12N$, $F_3=5N$ και $F_4=18N$. Να υπολογιστεί το μέτρο και η κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης.



Λύση

$\Sigma F=F_1+F_2+F_3+F_4=(+10N)+(+12N)+(-5N)+(-18N)=10N+12N-5N-18N=22N-23N=-1N$

Αυτό σημαίνει ότι η συνισταμένη δύναμη έχει μέτρο ΣF=1N και την αρνητική κατεύθυνση (προς τα αριστερά).

$1^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα

❑ Ο νόμος αυτός αναφέρεται στην περίπτωση που σε ένα σώμα δεν ασκούνται καθόλου δυνάμεις ή ασκούνται δυνάμεις μηδενικής συνισταμένης.

❑ Αναφέρει ότι αν σε ένα σώμα δεν ασκούνται καθόλου δυνάμεις ή ασκούνται δυνάμεις μηδενικής συνισταμένης, τότε το σώμα ή θα παραμένει ακίνητο ή θα κινείται με σταθερή ταχύτητα (ευθύγραμμη ομαλή κίνηση). Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν ένα σώμα παραμένει ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα (ευθύγραμμη ομαλή κίνηση), τότε στο σώμα δεν ασκούνται καθόλου δυνάμεις ή ασκούνται δυνάμεις μηδενικής συνισταμένης.

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} Ακινησία \\ ή \\ Ευθύγραμμη\ ομαλή\ κίνηση \end{Bmatrix}$$

❑ Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η φυσική τάση των σωμάτων είναι να διατηρούν σταθερή την κινητική τους κατάσταση και επομένως όταν ασκούνται πάνω τους δυνάμεις, να αντιστέκονται στην μεταβολή της κινητικής τους κατάστασης. Αυτή η ιδιότητα που έχουν όλα τα σώματα ονομάζεται **αδράνεια** και εκδηλώνεται με δύο μορφές, την τάση για διατήρηση της κινητικής κατάστασης όταν στο σώμα δεν ασκούνται δυνάμεις και στην αντίσταση στην μεταβολή της κινητικής κατάστασης όταν στο σώμα ασκούνται δυνάμεις. Μέτρο της αδράνειας των σωμάτων είναι η μάζα τους δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα του σώματος τόσο μεγαλύτερη είναι και η αντίδρασή του στην αλλαγή της ταχύτητάς του.

$2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα

❑ Ο νόμος αυτός αναφέρεται στην περίπτωση που σε ένα σώμα ασκούνται δυνάμεις των οποίων η συνισταμένη δεν είναι μηδέν.

❑ Αναφέρει ότι σε αυτή την περίπτωση το σώμα θα αποκτήσει επιτάχυνση η οποία:

i) Έχει την ίδια κατεύθυνση με την συνισταμένη δύναμη.

ii) Έχει μέτρο ανάλογο με την συνισταμένη δύναμη και αντιστρόφως ανάλογο με την μάζα του σώματος.

iii) Ο τύπος υπολογισμού του μέτρου της επιτάχυνσης είναι

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\Sigma F}{m} \Leftrightarrow \Sigma F = m.\alpha}$$

❑ Από τον παραπάνω τύπο προκύπτει ότι αν ΣF=0, τότε θα είναι και α=0,δηλαδή δεν θα αλλάξει η κινητική κατάσταση του σώματος, οπότε το σώμα ή θα είναι διαρκώς ακίνητο ή θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Επομένως ο $1^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα μπορεί να προκύψει και από τον $2^{ο}$ νόμο του Νεύτωνα.

❑ Επίσης αν στο σώμα ασκείται σταθερή συνισταμένη δύναμη και επιπλέον είναι:

i) ομόρροπη με την ταχύτητά του, το σώμα θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση,

ii) αντίρροπη της ταχύτητάς του, το σώμα θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

iii) αρχικά ακίνητο, το σώμα θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ίδιας κατεύθυνσης με της συνισταμένης δύναμης.

Ελεύθερη πτώση

❑ **Ελεύθερη πτώση** ονομάζεται η κίνηση που κάνει ένα σώμα αν το αφήσουμε να πέσει από κάποιο σχετικά μικρό ύψος και η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω του να είναι το βάρος του. Δηλαδή η ελεύθερη πτώση είναι μια πτώση που γίνεται απουσία ατμοσφαιρικού αέρα (στο κενό).

❑ Είναι μια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα.

❑ Όλα τα σώματα όταν πέφτουν ελεύθερα στο ίδιο τόπο έχουν την ίδια επιτάχυνση ανεξάρτητα από το μέγεθος ή το σχήμα τους. Αυτή λέγεται **επιτάχυνση της βαρύτητας** και συμβολίζεται με **g.** Η επιτάχυνση της βαρύτητας εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος του τόπου και σε ένα συγκεκριμένο τόπο από το ύψος.

❑ Ισχύουν οι τύποι:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon = gt}$$

Η έννοια του βάρους

❑ Το βάρος ενός σώματος είναι η δύναμη με την οποία το έλκει η Γη προς το κέντρο της. Σε μια μικρή περιοχή και για σχετικά μικρό ύψος από το έδαφος το βάρος ενός σώματος είναι σταθερό και έχει την κατακόρυφη διεύθυνση. Υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{B = mg}$$

❑ Προφανώς το βάρος ενός σώματος δεν είναι παντού το ίδιο, αλλά εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος του τόπου και σε ένα συγκεκριμένο τόπο από το ύψος. Επίσης αν βρεθούμε στο Διάστημα και μακριά από οποιοδήποτε πλανήτη ή αστέρι το βάρος μας πρακτικά μηδενίζεται.

❑ Δεν έχει νόημα να μιλάμε για το βάρος της γης ή οποιουδήποτε άλλου ουράνιου σώματος, παρά μόνο για το βάρος σωμάτων που βρίσκονται πάνω ή κοντά σε ουράνια σώματα και έλκονται από αυτά.

Η έννοια της μάζας

❑ Υπάρχουν δύο είδη μαζών, η **αδρανειακή μάζα** και η **βαρυτική μάζα**.

❑ Η αδρανειακή μάζα είναι αυτή που υπολογίζεται από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ΣF=ma, αν μετρήσουμε πόση επιτάχυνση αποκτά ένα σώμα όταν πάνω του ασκήσουμε μια συγκεκριμένη δύναμη και είναι μέτρο της αδράνειας του σώματος.

❑ Η βαρυτική μάζα είναι αυτή που υπολογίζεται με την βοήθεια του ζυγού, όπου συγκρίνουμε το βάρος του σώματος με το βάρος σταθμών (αντικειμένων γνωστής μάζας).

❑ Πειράματα έδειξαν ότι βαρυτική και η αδρανειακή μάζα ενός σώματος είναι ίσες επομένως μπορούμε απλά να χρησιμοποιούμε τον όρο μάζα, είτε πρόκειται για βαρυτική είτε πρόκειται για αδρανειακή μάζα.

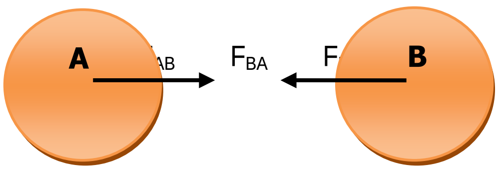
❑ Ορισμένες διαφορές της μάζας και του βάρους είναι οι εξής:

i. Η μάζα ενός σώματος είναι παντού η ίδια ενώ το βάρος του σώματος εξαρτάται από τον τόπο και από το ύψος.
ii. Η μάζα είναι μέτρο της αδράνειας του σώματος, ενώ το βάρος είναι δύναμη.
iii. Η μάζα είναι μονόμετρο μέγεθος, ενώ η δύναμη είναι διανυσματικό.
iv. Η μάζα μετριέται με το ζυγό, ενώ το βάρος με δυναμόμετρο.
v. Η μονάδα της μάζας είναι το 1Kg, ενώ της δύναμης είναι το 1N.

3ος νόμος του Νεύτωνα

❑ Ο **3ος νόμος του Νεύτωνα** περιγράφει τις δυνάμεις με τις οποίες δύο σώματα αλληλεπιδρούν και μας λέει ότι αυτές είναι αντίθετες, δηλαδή έχουν ίσα μέτρα και αντίθετες κατευθύνσεις.

$$\boldsymbol{F_{AB}} = -\boldsymbol{F_{BA}}$$



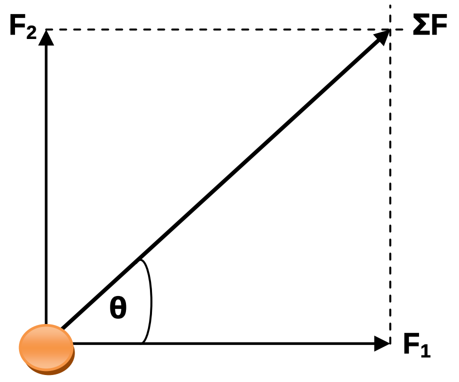
❑ Οι δυνάμεις αυτές με τις οποίες τα δύο σώματα αλληλεπιδρούν ονομάζονται και ως **δράση-αντίδραση**.

❑ Αφού η δράση και η αντίδραση ασκούνται σε διαφορετικά σώματα, δεν έχει νόημα ο υπολογισμός της συνισταμένης τους, οπότε είναι λάθος να πούμε ότι η συνισταμένη τους ισούται με μηδέν.

❑ Απόρροια του τρίτου νόμου του Νεύτωνα είναι ότι οι δυνάμεις εμφανίζονται πάντα κατά ζεύγη, αφού σε κάθε δράση αναπτύσσεται μια αντίδραση.

Σύνθεση δύο δυνάμεων που σχηματίζουν γωνία 90^0

❑ Για να υπολογίσουμε τη συνισταμένη δύο δυνάμεων που δεν είναι συγγραμμικές έχουμε δύο δυνατότητες. Τον κανόνα των διαδοχικών διανυσμάτων και τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Παρακάτω φαίνεται ο δεύτερος τρόπος.

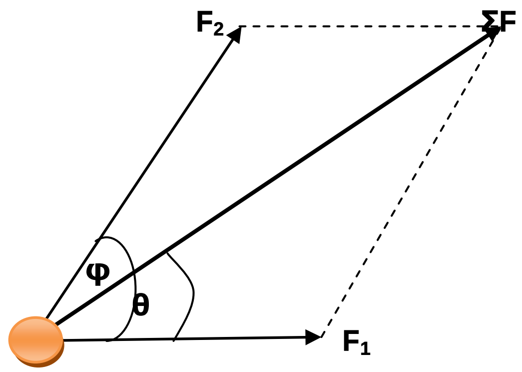


$$\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_2}{F_1}$$

Σύνθεση δύο δυνάμεων που σχηματίζουν τυχαία γωνία φ

❑ Με βάση τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε:



$$\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

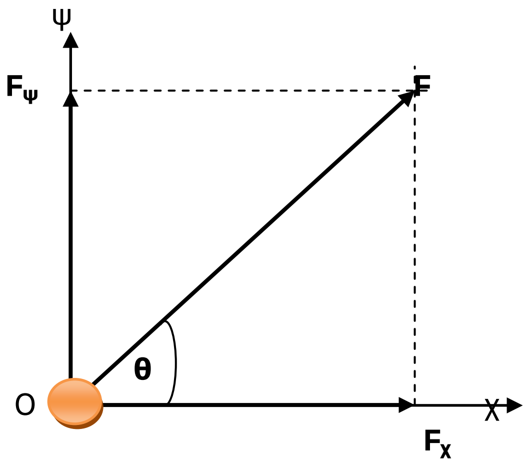
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_2\eta\mu\varphi}{F_1 + F_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Ανάλυση μιας δύναμης σε ορθογώνιες συνιστώσες

❑ Η ανάλυση είναι η αντίστροφη διαδικασία της σύνθεσης. Δηλαδή έχουμε μια δύναμη την οποία αντικαθιστούμε με δύο δυνάμεις (που λέγονται συνιστώσες) και που φέρνουν το ίδιο αποτέλεσμα με αυτή.

❑ Όταν θέλουμε οι συνιστώσες να είναι πάνω σε δύο ορθογώνιους άξονες, φέρνουμε από την μύτη του βέλους που παριστάνει την δύναμη F παράλληλες στους δύο άξονες με αποτέλεσμα να σχηματιστεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Οι πλευρές του παραλληλογράμμου αυτού είναι οι συνιστώσες F_x και $F_ψ$ της δύναμης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

❑



Η <u>προσκείμενη</u> στην γνωστή γωνία συνιστώσα της F ισούται με:

$$\boldsymbol{F_x = F.συνθ}$$

Η <u>απέναντι</u> από την γνωστή γωνία συνιστώσα της F ισούται με:

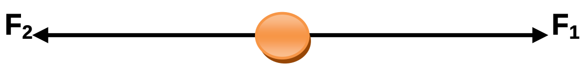
$$\boldsymbol{F_ψ = F.ημθ}$$

Ισορροπία ενός σώματος υπό την επίδραση ομοεπίπεδων δυνάμεων

❑ Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, εφόσον το σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση πολλών ομοεπίπεδων δυνάμεων θα ισχύει $\boldsymbol{Σ\vec{F} = 0}$. Εφόσον τώρα οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα αναλυθούν σε ορθογώνιες συνιστώσες , η παραπάνω διανυσματική σχέση μπορεί να αντικατασταθεί από δύο ισοδύναμες σχέσεις για τον κάθε άξονα ξεχωριστά, $\boldsymbol{ΣF_x = 0}$ και $\boldsymbol{ΣF_ψ = 0}$ οι οποίες επειδή αφορούν συγραμμικά διανύσματα γράφονται και αλγεβρικά .

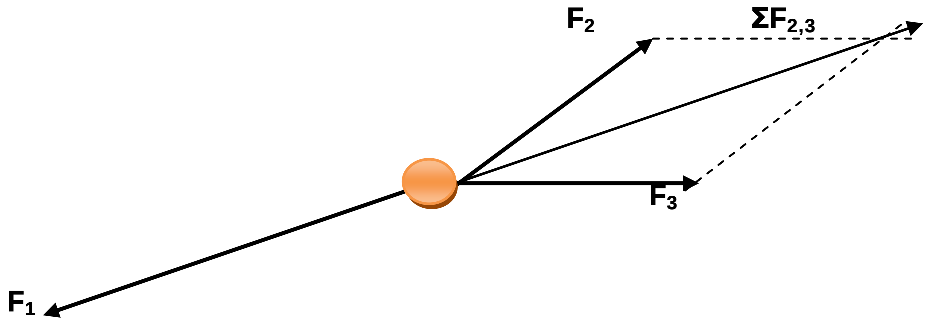
❑ Στην ειδική περίπτωση που ασκούνται δύο δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$Σ\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F_1} + \vec{F_2} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\vec{F_1} = -\vec{F_2}}$$



❑ Στην περίπτωση που οι δυνάμεις είναι τρείς, η καθεμία από αυτές είναι αντίθετη με την συνισταμένη των άλλων δύο.

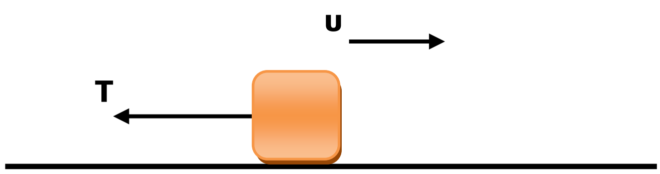
$$Σ\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = 0 \Leftrightarrow \vec{F_1} = -(\vec{F_2} + \vec{F_3}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\vec{F_1} = -\overrightarrow{ΣF_{2,3}}}$$



Στο σχήμα αυτό φαίνεται για παράδειγμα ότι η F_1 είναι αντίθετη με την συνισταμένη των δυνάμεων F_2 και F_3.

Ο νόμος της τριβής

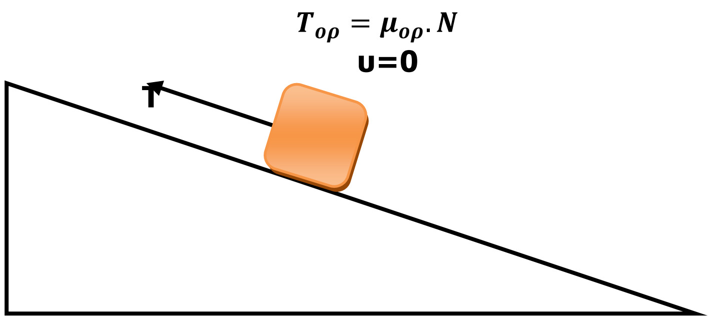
- Όταν ένα σώμα ολισθαίνει πάνω σε μια επιφάνεια επειδή οι επιφάνειές τους δεν είναι ποτέ εντελώς λείες, εμφανίζεται μια δύναμη η οποία έχει αντίθετη κατεύθυνση με την κίνηση με αποτέλεσμα η ολίσθηση να γίνεται με κάποια δυσκολία. Αυτή η δύναμη ονομάζεται **τριβή ολίσθησης** και το μέτρο της είναι ανάλογο με την κάθετη αντίδραση που ασκείται στο σώμα.



$$T = \mu . N$$

Ο συντελεστής αναλογίας μ, ονομάζεται συντελεστής τριβής ολίσθησης και εξαρτάται από την φύση των επιφανειών που έρχονται σε επαφή. Πρέπει επίσης να αναφέρουμε ότι η τριβή ολίσθησης δεν εξαρτάται από το εμβαδό των επιφανειών ούτε από την ταχύτητα του ενός σώματος ως προς το άλλο.

- Μερικές φορές ένα σώμα τείνει να κινηθεί πάνω σε μια επιφάνεια χωρίς να τα καταφέρνει (π.χ. ένα κιβώτιο που βρίσκεται σε κατηφορικό δρόμο ή ένα βαρύ κιβώτιο που βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο και το σπρώχνουμε με μικρή δύναμη). Αυτό το γεγονός οφείλεται πάλι στο ότι οι δύο επιφάνειες που έρχονται σε επαφή δεν είναι εντελώς λείες με αποτέλεσμα να εμφανίζεται μια δύναμη που εμποδίζει την ολίσθηση. Αυτή η δύναμη ονομάζεται τώρα **στατική τριβή** .Η στατική τριβή δεν παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή αλλά είναι κάθε φορά τόση όσο χρειάζεται για να μη κινηθεί το σώμα. Η στατική τριβή γίνεται μέγιστη τη στιγμή που το σώμα είναι έτοιμο να κινηθεί και ονομάζεται τότε **οριακή στατική τριβή**. Αποδεικνύεται ότι το μέτρο της οριακής στατικής τριβής είναι ανάλογο με την κάθετη αντίδραση που ασκείται στο σώμα.



Ο συντελεστής αναλογίας μ_{op}, ονομάζεται συντελεστής οριακής στατικής τριβής και εξαρτάται από την φύση των επιφανειών που έρχονται σε επαφή.

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα στην περίπτωση που στο σώμα ασκούνται ομοεπίπεδες δυνάμεις.

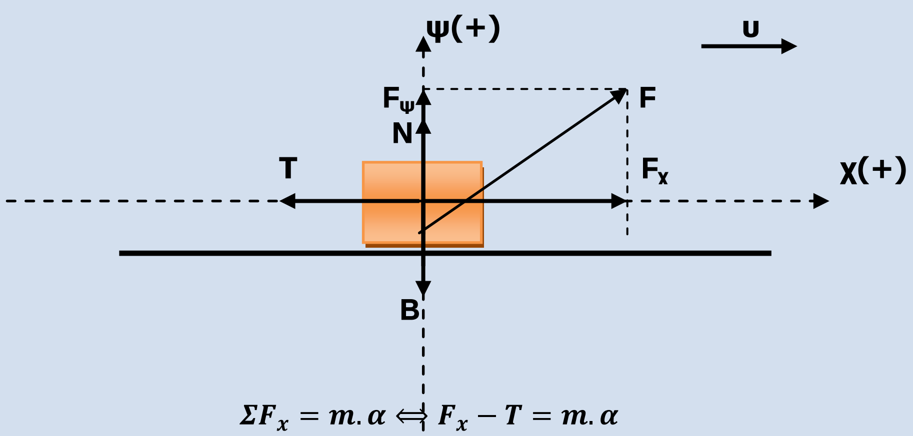
Έστω ότι ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα πάνω σε οριζόντιο ή κεκλιμένο επίπεδο και πάνω του ασκούνται πολλές δυνάμεις οι οποίες βρίσκονται όλες πάνω στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Τότε ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

i. Επιλέγουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων Οχψ το οποίο βρίσκεται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με τις δυνάμεις, με τον άξονα χ΄χ να είναι παράλληλος με την διεύθυνση της κίνησης
ii. Ορίζουμε θετική φορά στον άξονα χ΄χ τέτοια ώστε να συμπίπτει με τη φορά της κίνησης. Στον άξονα ψ΄ψ η θετική φορά μπορεί να είναι η οποιαδήποτε.
iii. Αναλύουμε στη συνέχεια σε συνιστώσες όσες δυνάμεις δεν βρίσκονται πάνω στους άξονες .
iv. Τέλος για τον κάθε άξονα ξεχωριστά γράφουμε τις αλγεβρικές σχέσεις:

$$\Sigma F_x = m.\alpha \quad \kappa\alpha\iota \quad \Sigma F_\psi = 0$$

Οπότε έχουμε στη διάθεση μας δύο εξισώσεις για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση ή κάποια άγνωστη δύναμη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



$$\Sigma F_x = m.\alpha \Leftrightarrow F_x - T = m.\alpha$$
$$\Sigma F_\psi = 0 \Leftrightarrow N + F_\psi - B = 0$$

Οριζόντια βολή

- **Οριζόντια βολή** ονομάζεται η κίνηση που κάνει ένα σώμα αν το εκτοξεύσουμε οριζόντια από μικρό ύψος και θεωρήσουμε την αντίσταση του αέρα ασήμαντη.

- Η οριζόντια βολή μπορεί να μελετηθεί αν θεωρήσουμε ότι είναι μια **σύνθετη κίνηση** , η οποία αποτελείται από τις εξής υποθετικές κινήσεις:

  i. Μια <u>ευθύγραμμη ομαλή κίνηση</u> η οποία γίνεται πάνω στον οριζόντιο άξονα Οχ.
  ii. Μια <u>ελεύθερη πτώση</u> η οποία γίνεται πάνω στον κατακόρυφο άξονα Οψ.

- Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη θέση και την ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή t.

  i. Βρίσκουμε τη θέση και την ταχύτητα του σώματος στον άξονα Οχ τη χρονική στιγμή t, χρησιμοποιώντας τους τύπους: $\boldsymbol{x = \upsilon_0 . t}$ και $\boldsymbol{\upsilon_x = \upsilon_0}$.

  ii. Βρίσκουμε επίσης τη θέση και την ταχύτητα του σώματος στον άξονα Οψ τη ίδια χρονική στιγμή t, χρησιμοποιώντας τους τύπους: $\boldsymbol{\psi = \frac{1}{2} . \alpha . t^2}$ και $\boldsymbol{\upsilon_\psi = \alpha . t}$.

Σύμφωνα τώρα με την **αρχή της επαλληλίας** η οποία ισχύει σε κάθε σύνθετη κίνηση και αναφέρει ότι ***«****όταν ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο ή περισσότερες κινήσεις , η καθεμιά από αυτές εκτελείται εντελώς ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες και η θέση στην οποία φτάνει το κινητό τη χρονική στιγμή t, είναι η ίδια είτε οι κινήσεις εκτελούνται ταυτόχρονα , είτε εκτελούνται διαδοχικά σε χρόνο t η κάθε μία****»****.*

i. Η πραγματική θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t θα είναι

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{\psi}}$$

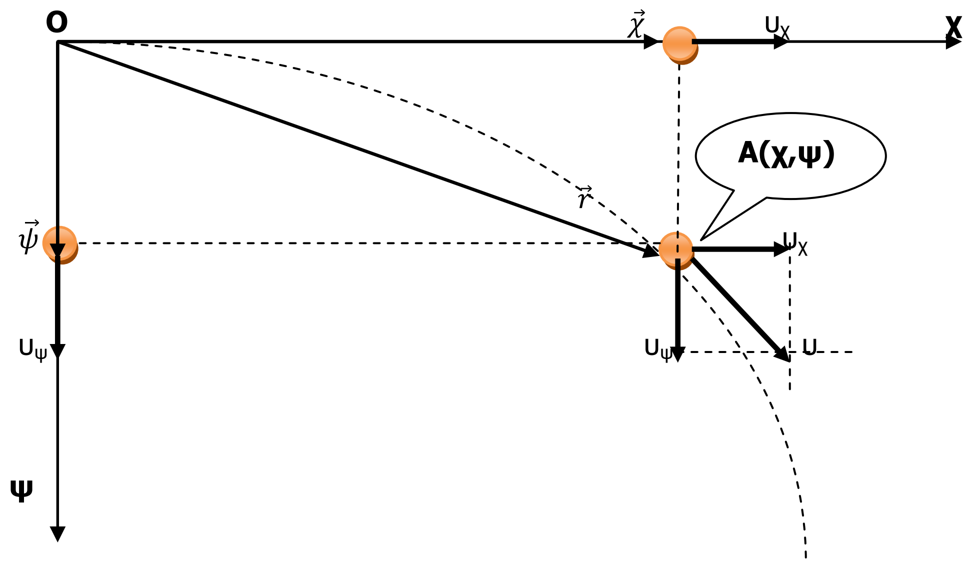
Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το σώμα θα βρίσκεται στο σημείο Α του επιπέδου Οχψ του οποίου οι συντεταγμένες είναι οι αριθμοί χ,ψ.

ii. Η πραγματική ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t θα είναι

$$\vec{\boldsymbol{\upsilon}} = \overrightarrow{\boldsymbol{\upsilon_\chi}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\upsilon_\psi}}$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η ταχύτητα του σώματος θα έχει μέτρο $\upsilon = \sqrt{\upsilon_\chi^2 + \upsilon_\psi^2}$ και κατεύθυνση $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_\psi}{\upsilon_\chi}$

Όλα αυτά φαίνονται παραστατικά στο παρακάτω σχήμα. Αποδεικνύεται ότι η τροχιά του σώματος είναι παραβολή.



Ομαλή κυκλική κίνηση

- **Ομαλή κυκλική** λέγεται η κίνηση στην οποία το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά και σε ίσους χρόνους (όσο μικρής διάρκειας και αν είναι) διανύει ίσα τόξα. Προφανώς μια τέτοια κίνηση επαναλαμβάνεται σε ίσους χρόνους κάθε φορά γι' αυτό και είναι **περιοδική κίνηση.**

- **Περίοδος (T)** είναι ο χρόνος στον οποίο διανύεται ένας πλήρης κύκλος. (π.χ. T=2s).

- **Συχνότητα (f)** είναι ο αριθμός των κύκλων που διανύονται ανά δευτερόλεπτο. (π.χ. f=5 Hz). Αν το κινητό διανύει N κύκλους σε χρόνο t, η συχνότητά του υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{f = \frac{N}{t}}$$

Επίσης η σχέση της συχνότητας με την περίοδο αποδεικνύεται ότι είναι η:

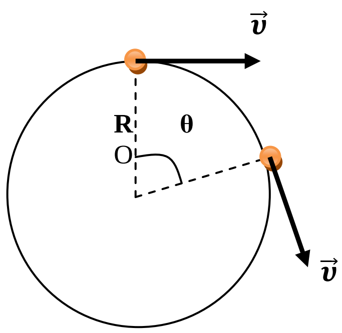
$$\boldsymbol{f = \frac{1}{T}}$$

- **Η γραμμική ταχύτητα** είναι ένα διάνυσμα που έχει τα εξής χαρακτηριστικά.

Το μέτρο της είναι ίσο με το πηλίκο του τόξου S που διανύει το σώμα, προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια t.

$$\boldsymbol{\upsilon = \frac{S}{t}}$$

Η διεύθυνσή του είναι κάθε φορά εφαπτόμενη στον κύκλο και η φορά του είναι η φορά της κίνησης.



Μονάδα μέτρησης στο (S.I) είναι το 1m/s

Η γραμμική ταχύτητα συνδέεται με την περίοδο Τ και τη συχνότητα f με τις σχέσεις:

$$\boldsymbol{\upsilon = \frac{2\pi R}{T} \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon = 2\pi R f}$$

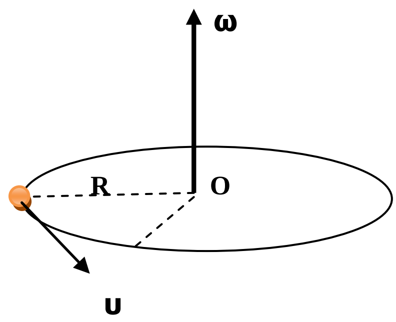
Προφανώς το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό, ενώ η κατεύθυνσή της αλλάζει διαρκώς. Άρα στην ομαλή κυκλική κίνηση ισχύει: $\vec{\boldsymbol{\upsilon}} \neq \boldsymbol{\sigma\tau\alpha\theta}$.

- **Η γωνιακή ταχύτητα** είναι ένα διάνυσμα που έχει τα εξής χαρακτηριστικά.

Το μέτρο της είναι ίσο με το πηλίκο της επίκεντρης γωνίας θ που διαγράφει η επιβατική ακτίνα, προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια t.

$$\boldsymbol{\omega = \frac{\theta}{t}}$$

Το σημείο εφαρμογής της είναι στο κέντρο του κύκλου, η διεύθυνσή της είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου και η φορά της βρίσκεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Μονάδα μέτρησης στο (S.I) είναι το 1rad/s

Η γωνιακή ταχύτητα συνδέεται με την περίοδο Τ και τη συχνότητα f με τις σχέσεις:

$$\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \kappa\alpha\iota \quad \omega = 2\pi f}$$

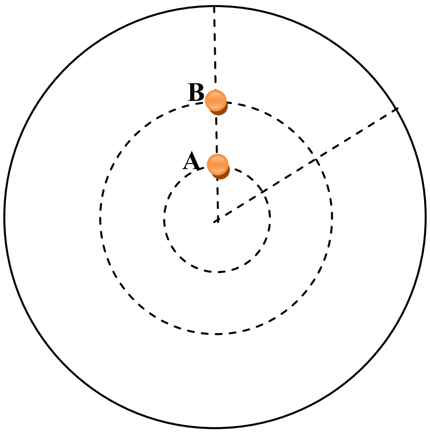
Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας είναι σταθερό και ως προς το μέτρο του και ως προς την κατεύθυνσή του. Άρα στην ομαλή κυκλική κίνηση ισχύει:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\sigma\tau\alpha\theta}.$$

- Η σχέση των μέτρων της γραμμικής και της γωνιακής ταχύτητας αποδεικνύεται ότι είναι η εξής:

$$\boldsymbol{\upsilon = \omega . R}$$

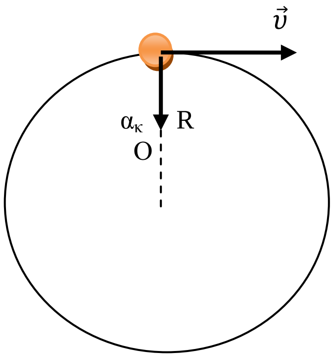
❑ Έστω ότι ένας δίσκος περιστρέφεται γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του. Όλα τα σημεία του εκτελούν κυκλικές κινήσεις με κέντρο τον άξονα περιστροφής. Όπως φαίνεται από το διπλανό σχήμα όσο μακρύτερα από το κέντρο είναι κάποιο σημείο τόσο μεγαλύτερο τόξο διανύει, ενώ για όλα τα σημεία η επιβατική ακτίνα διαγράφει την ίδια γωνία. Σαν αποτέλεσμα έχουμε την ίδια γωνιακή ταχύτητα για όλα τα σημεία του δίσκου, η οποία λέγεται και γωνιακή ταχύτητα του δίσκου.



❑ Κεντρομόλος επιτάχυνση

Όπως είδαμε προηγούμενα, στην ομαλή κυκλική κίνηση το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας δεν είναι σταθερό, γιατί αλλάζει η κατεύθυνσή του. Άρα υπάρχει επιτάχυνση η οποία ονομάζεται κεντρομόλος επιτάχυνση, γιατί όπως αποδεικνύεται έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Το μέτρο της δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}}$$

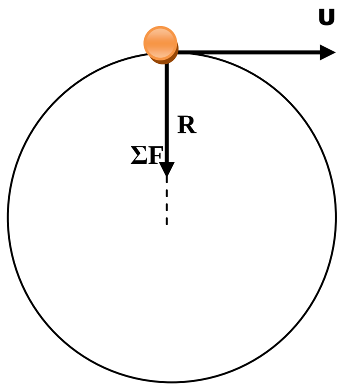


❑ Κεντρομόλος δύναμη

Όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση είδαμε ότι έχει επιτάχυνση η οποία ονομάζεται κεντρομόλος. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα αυτή την επιτάχυνση την προκαλεί μια συνισταμένη δύναμη η οποία έχει την ίδια κατεύθυνση με αυτή. Επομένως όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση δέχεται από το περιβάλλον του κάποιες δυνάμεις, των οποίων η συνισταμένη ονομάζεται **κεντρομόλος δύναμη**, έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και μέτρο:

$$\boldsymbol{\Sigma F = m.\alpha_\kappa \Leftrightarrow \Sigma F = m.\frac{\upsilon^2}{R} \Leftrightarrow \Sigma F = m.\omega^2.R}$$

Πρέπει να τονιστεί εδώ ότι η κεντρομόλος δύναμη δεν είναι κάποια επιπλέον δύναμη όπως π.χ. είναι το βάρος, αλλά το όνομα που δίνουμε στη συνισταμένη όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα όταν αυτό εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Για παράδειγμα στην περίπτωση της Σελήνης ρόλο κεντρομόλου δύναμης παίζει η βαρυτική έλξη της Γης, ενώ στην περίπτωση του ηλεκτρονίου του ατόμου του υδρογόνου ρόλο κεντρομόλου δύναμης παίζει η ελκτική δύναμη Coulomb που ασκείται από τον πυρήνα.



Στις ασκήσεις στις οποίες μελετούμε την κυκλική κίνηση ενός σώματος, πρώτα σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και στη συνέχεια τις αναλύουμε σε συνιστώσες πάνω σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων οι οποίοι έχουν αρχή το σώμα και βρίσκονται πάνω στο επίπεδο των δυνάμεων. Ο ένας από τους δύο άξονες έχει την διεύθυνση της ακτίνας με θετική φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και η συνισταμένη των δυνάμεων που βρίσκονται πάνω του είναι η κεντρομόλος δύναμη, δηλαδή θα ισχύει $\boldsymbol{\Sigma F} = \boldsymbol{m a_{\kappa}}$. Η συνισταμένη των δυνάμεων που βρίσκονται πάνω στον άλλο άξονα θα ισούται με $\boldsymbol{\Sigma F} = \mathbf{0}$ αν η κίνηση είναι ομαλή κυκλική ή $\boldsymbol{\Sigma F} = \boldsymbol{m a}$ αν η κυκλική κίνηση είναι επιταχυνόμενη.

Σύστημα σωμάτων - εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις

- **Σύστημα σωμάτων** είναι ένα σύνολο σωμάτων τα οποία τα ξεχωρίζουμε από όλα τα υπόλοιπα και μελετάμε τόσο τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους, όσο και την αλληλεπίδρασή τους με το **περιβάλλον** τους.

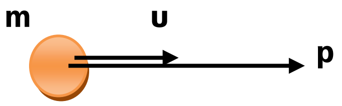
- Τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος από άλλα σώματα του ίδιου συστήματος τις ονομάζουμε **εσωτερικές δυνάμεις**, ενώ τις δυνάμεις που ασκούνται από σώματα του περιβάλλοντος τις ονομάζουμε **εξωτερικές δυνάμεις**.

- Αν σε ένα σύστημα σωμάτων δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή ασκούνται αλλά έχουν συνισταμένη μηδέν – δηλαδή πρακτικά ασκούνται μόνο οι εσωτερικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης - το σύστημα ονομάζεται **μονωμένο**.

Η έννοια της ορμής

Έστω ότι ένα υλικό σημείο μάζας m κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Ορίζουμε την ορμή του σώματος ως το διάνυσμα:

$$\vec{\mathbf{p}} = \mathbf{m}.\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$$



Το διάνυσμα της ορμής έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα της ταχύτητας, το μέτρο του είναι p=m.υ και η μονάδα μέτρησης στο S.I. είναι το 1Kg.m/s.

Η μεταβολή της ορμής

Έστω ότι ένα κινούμενο σώμα έχει κάποια χρονική στιγμή ορμή $\overrightarrow{p_1}$ και μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή έχει ορμή $\overrightarrow{p_2}$. Η μεταβολή της ορμής του είναι ένα διάνυσμα που βρίσκεται αν από το διάνυσμα της τελικής ορμής αφαιρέσουμε το διάνυσμα της αρχικής ορμής. Δηλαδή:

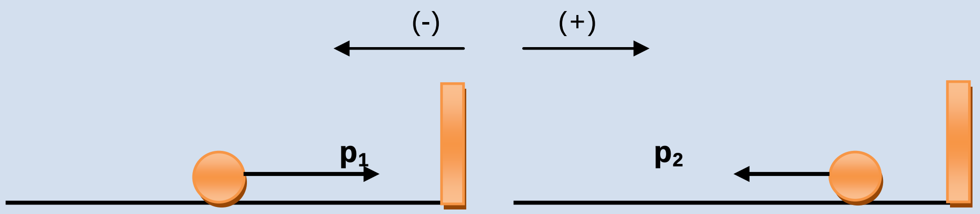
$$\boldsymbol{\Delta\vec{p}} = \boldsymbol{\overrightarrow{p_2}} - \boldsymbol{\overrightarrow{p_1}}$$

Στην περίπτωση που τα διανύσματα των ορμών είναι συγγραμμικά, η παραπάνω σχέση γράφεται με την αλγεβρική της μορφή, δηλαδή αντικαθιστούμε σ’ αυτή τις αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένα σώμα κινείται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με ορμή μέτρου p_1=10 Kg.m/s και στην πορεία του συναντά κατακόρυφο τοίχο. Σαν αποτέλεσμα της σύγκρουσης το σώμα αντιστρέφει τη φορά της κίνησής του και το μέτρο της ορμής του γίνεται p_2=8Kg.m/s. Να υπολογιστεί το μέτρο και η κατεύθυνση της μεταβολής της ορμής του σώματος.

ΛΥΣΗ



$$\boldsymbol{\Delta p = p_2 - p_1 \Leftrightarrow \Delta p = (-8) - (+10) = -8 - 10 \Leftrightarrow \Delta p = -18\, Kg.\frac{m}{s}}.$$

Επομένως το διάνυσμα της μεταβολής της ορμής έχει μέτρο 18 Kg.m/s και κατεύθυνση προς τα αριστερά.

Η δύναμη και η μεταβολή της ορμής

Όταν σε ένα σώμα ασκείται μια συνισταμένη δύναμη ΣF για χρονική διάρκεια Δt θα του προκαλέσει ορισμένη μεταβολή στην ταχύτητά του, άρα και στην ορμή του. Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι η συνισταμένη δύναμη είναι ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής της ορμής που θα προκαλέσει. Δηλαδή ισχύει η σχέση:

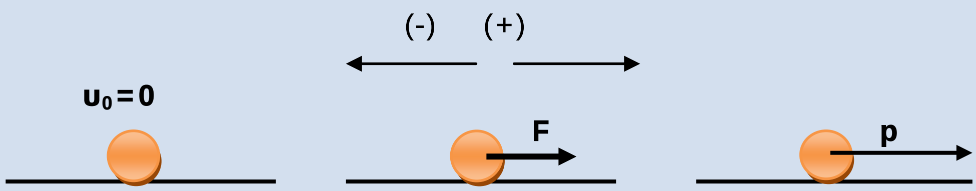
$$\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Η παραπάνω διανυσματική σχέση στην περίπτωση συγγραμμικών διανυσμάτων γράφεται με αλγεβρική μορφή.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένας ποδοσφαιριστής κτυπάει μια ακίνητη μπάλα ποδοσφαίρου μάζας 0,5Kg με αποτέλεσμα αυτή να αποκτήσει ταχύτητα μέτρου 24m/s. Αν η διάρκεια της επαφής της μπάλας με το πόδι του ποδοσφαιριστή είναι 0,03s να υπολογιστεί η δύναμη που ασκήθηκε στη μπάλα.

ΛΥΣΗ



$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p - p_0}{\Delta t} = \frac{m.\upsilon - 0}{\Delta t} = \frac{0,5.(+24)}{0,03} = +\frac{12}{0,03} = 400N$$

Επομένως το διάνυσμα της δύναμης έχει μέτρο 18 Kg.m/s και κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Η ορμή του συστήματος σωμάτων

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα σωμάτων που απαρτίζεται από κινούμενα σώματα που το καθένα έχει την δική του ορμή. Το διανυσματικό άθροισμα των ορμών των σωμάτων του συστήματος ονομάζεται ορμή του συστήματος. Δηλαδή:

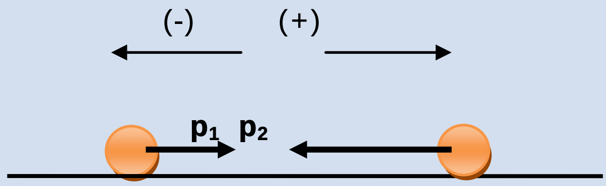
$$\overrightarrow{p_{o\lambda}} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} + \cdots$$

Στη περίπτωση που τα διανύσματα των ορμών των σωμάτων του συστήματος είναι συγραμμικά, το παραπάνω άθροισμα γράφεται αλγεβρικά, δηλαδή αντικαθιστούμε σ' αυτή τις αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δύο σώματα κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία με ορμές μέτρου p_1=12Kg.m/s και p_2=20Kg.m/s προς αντίθετες κατευθύνσεις, πλησιάζοντας το ένα το άλλο. Να υπολογιστεί το διάνυσμα της ορμής του συστήματος.

ΛΥΣΗ



$$\boldsymbol{p_{o\lambda}} = \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2} = (+\mathbf{12}) + (-\mathbf{20}) = \mathbf{12} - \mathbf{20} = -\mathbf{8}\ \boldsymbol{Kg.m/s}$$

Επομένως το διάνυσμα της ορμής του συστήματος έχει μέτρο 8Kg.m/s και κατεύθυνση προς τα αριστερά.

Η αρχή διατήρησης της ορμής

- Η αρχή διατήρησης της ορμής εφαρμόζεται σε μονωμένο σύστημα σωμάτων και μας λέει ότι παρόλο που μπορεί να αλλάζουν οι ορμές των σωμάτων του συστήματος, το διανυσματικό τους άθροισμα που ονομάζεται ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{o\lambda}(\boldsymbol{\alpha\rho\chi})}} = \overrightarrow{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{o\lambda}(\boldsymbol{\tau\varepsilon\lambda})}}$$

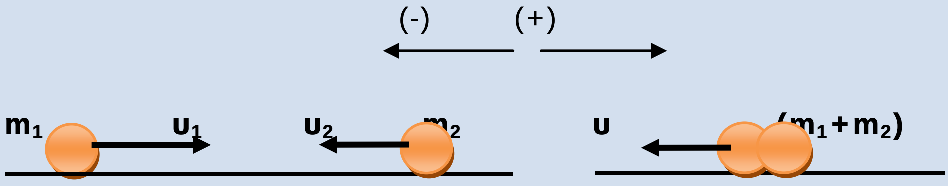
Στη περίπτωση που τα διανύσματα των ορμών των σωμάτων του συστήματος είναι συγραμμικά, η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά, δηλαδή αντικαθιστούμε σ' αυτή τις αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων.

- Υπάρχουν μια σειρά από φαινόμενα τα οποία διαρκούν απειροελάχιστα και στα οποία εμφανίζονται πολύ ισχυρές δυνάμεις αλληλεπίδρασης. Τα συστήματα αυτά λόγω αυτής της ιδιαιτερότητάς τους μπορούν να θεωρηθούν μονωμένα, ακόμα και αν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα (οι εξωτερικές δυνάμεις τότε είναι ασήμαντες σε σχέση με τις εσωτερικές δυνάμεις). Τέτοια φαινόμενα είναι η **κρούση**, η **έκρηξη** και η **εκπυρσοκρότηση** του όπλου. Σε αυτά λοιπόν τα προβλήματα η αρχή διατήρησης της ορμής είναι μια απαραίτητη σχέση για να υπολογίσουμε ταχύτητες στην αρχή ή στο τέλος του φαινομένου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δύο σώματα με μάζες m_1=2Kg και m_2=4Kg κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες μέτρου $υ_1$=6m/s και $υ_2$=5m/s προς αντίθετες κατευθύνσεις, πλησιάζοντας το ένα το άλλο. Κάποια στιγμή τα δύο σώματα συγκρούονται με αποτέλεσμα τη δημιουργία συσσωματώματος (πλαστική κρούση). Να υπολογιστεί το διάνυσμα της ταχύτητας του συσσωματώματος.

ΛΥΣΗ



$$p_{ολ(αρχ)} = p_{ολ(τελ)} \Leftrightarrow p_1 + p_2 = p \Leftrightarrow m_1.v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(+6) + 4(-5) = (2+4).v \Leftrightarrow 12 - 20 = 6v \Leftrightarrow -8 = 6v \Leftrightarrow v = -\frac{4}{3} m/s$$

Επομένως το διάνυσμα της ταχύτητας του συσσωματώματος έχει μέτρο $\frac{4}{3}$ m/s και κατεύθυνση προς τα αριστερά.

- Από την αρχή διατήρησης της ορμής προκύπτει επίσης στη περίπτωση ενός μονωμένου συστήματος δύο σωμάτων οι μεταβολές των ορμών τους είναι αντίθετες. Δηλαδή ισχύει:

$$\Delta\vec{p_1} = -\Delta\vec{p_2}$$

- Όταν αμέσως μετά την κρούση προκύπτει συσσωμάτωμα, η κρούση ονομάζεται πλαστική. Αποδεικνύεται ότι σε κάθε πλαστική κρούση η κινητική ενέργεια του συστήματος ελαττώνεται. Δηλαδή η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι μικρότερη από το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των σωμάτων που συγκρούονται.

Η έννοια του έργου

- Λέμε γενικά, ότι κάποιες δυνάμεις **παράγουν έργο W** όταν ασκούνται σε ένα σώμα το οποίο μετακινείται και κατά συνέπεια μετακινείται και το σημείο εφαρμογής τους.

- Ειδικότερα αν η κατεύθυνση της δύναμης σχηματίζει οξεία γωνία με την μετατόπιση (δηλαδή η δύναμη βοηθάει στη μετατόπιση) το έργο της δύναμης είναι θετικό και λέμε ότι η δύναμη παράγει έργο, ενώ αν η κατεύθυνση της δύναμης σχηματίζει αμβλεία γωνία με την μετατόπιση (δηλαδή η δύναμη δυσκολεύει τη μετατόπιση) το έργο της δύναμης είναι αρνητικό και λέμε ότι η δύναμη καταναλώνει έργο

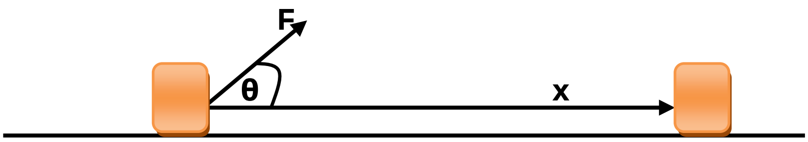
- **Κάθε φορά που μια δύναμη εκτελεί έργο (θετικό ή αρνητικό) συμβαίνει μεταφορά ενέργειας από ένα σώμα σε ένα άλλο ή μετατροπή ενέργειας από μια**

μορφή σε μια άλλη. Η ενέργεια αυτή είναι ίση με το έργο που παράγεται. Πολλές φορές λοιπόν που μας είναι αδύνατο να μετρήσουμε άμεσα πόση ενέργεια μεταφέρεται ή μετατρέπεται την υπολογίζουμε έμμεσα μέσω του παραγόμενου της κατάλληλης δύναμης.

- Το έργο είναι μονόμετρο μέγεθος και στο S.I μετριέται σε Joule, όπως και η ενέργεια.

Έργο σταθερής δύναμης για ευθύγραμμη μετατόπιση

- Έστω ότι ένα σώμα μετατοπίζεται ευθύγραμμα κατά Δx και μια από τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του είναι σταθερή και σχηματίζει γωνία θ με την μετατόπιση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Στην περίπτωση αυτή το έργο της δύναμης F υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{W = F.\Delta x.\sigma\upsilon\nu\theta}$$

Από τον παραπάνω τύπο προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

i) Αν $0 \leq \theta < 90^0$ τότε συνθ>0 οπότε και W>0. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η δύναμη F και κατά συνέπεια αυτός που την ασκεί προσφέρει ενέργεια στο σώμα.

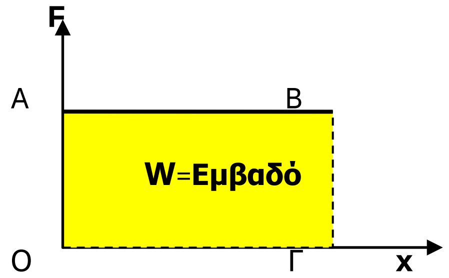
ii) Αν $90^0 < \theta \leq 180^0$ τότε συνθ<0 οπότε και W<0. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η δύναμη F και κατά συνέπεια αυτός που την ασκεί αφαιρεί ενέργεια από το σώμα.

iii) Αν θ=90^0 τότε συνθ=0 οπότε και W=0. Στην περίπτωση αυτή η δύναμη δεν συνεισφέρει ενεργειακά στο σώμα. *Δυνάμεις που είναι πάντα κάθετες στη μετατόπιση και κατά συνέπεια έχουν μηδενικό έργο είναι η κεντρομόλος δύναμη στην κυκλική κίνηση, η κάθετη αντίδραση κ.τ.λ.*

iv) Στην ειδική περίπτωση που η δύναμη έχει την κατεύθυνση της μετατόπισης είναι:

$$W = F.\Delta x.\sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow W = F.\Delta x.(+1) \Leftrightarrow \boldsymbol{W = +F.\Delta x}$$

Η γραφική παράσταση της δύναμης σε συνάρτηση με την θέση του σώματος πάνω στον άξονα x'x είναι μια ευθεία γραμμή παράλληλη με τον άξονα Ox.



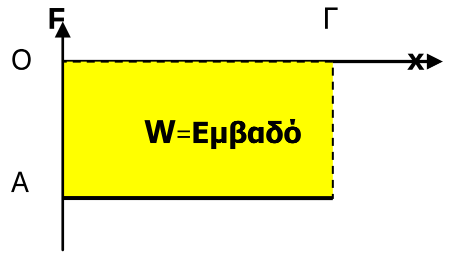
Το εμβαδό του ορθογωνίου που σχηματίζεται μας δίνει το έργο της δύναμης F για τη μετατόπιση Δx, γιατί:

Εμβαδό=(ΟΑ).(ΟΓ)=F.Δx=W

v) Στην ειδική περίπτωση που η δύναμη έχει αντίθετη κατεύθυνση από τη μετατόπιση είναι:

$$W = F.\Delta x.\sigma\upsilon\nu 180 \Leftrightarrow W = F.\Delta x.(-1) \Leftrightarrow \boldsymbol{W = -F.\Delta x}$$

Η γραφική παράσταση της δύναμης σε άξονες F-x είναι μια ευθεία γραμμή παράλληλη με τον άξονα x.



Το εμβαδό του ορθογωνίου που σχηματίζεται μας δίνει το έργο της δύναμης F για τη μετατόπιση Δx, γιατί:

Εμβαδό=(ΟΑ).(ΟΓ)=-F.Δx=W

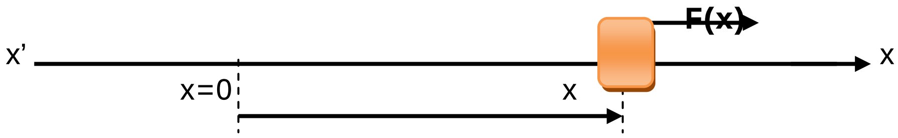
Κλασσική περίπτωσης δύναμης που εντάσσεται σε αυτή τη κατηγορία είναι η τριβή ολίσθησης.

Έργο δύναμης μεταβλητού μέτρου για ευθύγραμμη μετατόπιση

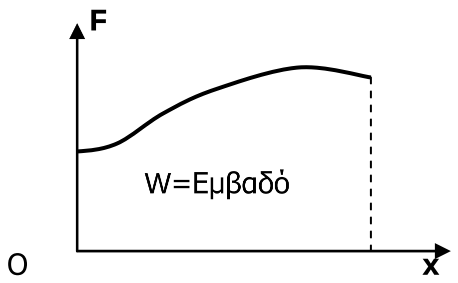
❑ Έστω ότι ένα σώμα μετατοπίζεται ευθύγραμμα και μια από τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του είναι:

α) μεταβλητού μέτρου, του οποίου γνωρίζουμε τη συνάρτηση με τη θέσης του σώματος πάνω στον άξονα x'x και

β) έχει την κατεύθυνση της μετατόπισης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Και σε αυτή τη περίπτωση που η δύναμη δεν είναι σταθερή αποδεικνύεται ότι το έργο της δίνεται πάλι από το εμβαδό του χώρου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της δύναμης F και τον άξονα x.



Κινητική ενέργεια

❑ Έστω ότι ένα σώμα μάζας m κινείται με ταχύτητα υ. Εξαιτίας της κίνησής του έχει ενέργεια, δηλαδή έχει την δυνατότητα να παράγει έργο και να μεταδώσει κίνηση, η οποία ονομάζεται κινητική ενέργεια και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{K = \frac{1}{2} m v^2}$$

Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε)

❑ Σε κάθε περίπτωση που ένα σώμα μετατοπίζεται και πάνω του ασκούνται κάποιες δυνάμεις, η καθεμία δύναμη γενικά παράγει ορισμένο έργο (θετικό ή αρνητικό). Το σώμα συνήθως επιταχύνεται ή επιβραδύνεται οπότε τις περισσότερες φορές μεταβάλλεται η κινητική του ενέργεια. Αποδεικνύεται ότι:

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του ή ισοδύναμα με το έργο της συνισταμένης δύναμης.

$$\boldsymbol{\Delta K = \Sigma W} \quad \boldsymbol{\acute{\eta}} \quad \boldsymbol{\Delta K = W_{\Sigma F}}$$

Η παραπάνω διατύπωση μας είναι γνωστή ως «Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας» ή «Θεώρημα έργου ενέργειας».

Στην παραπάνω εξίσωση είναι: $\Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2$

και $\Sigma W = W_1 + W_2 + \cdots$

❑ Το Θ.Μ.Κ.Ε. το εφαρμόζουμε συνήθως όταν θέλουμε να υπολογίσουμε:

α) την ταχύτητα του σώματος σε κάποια θέση της τροχιάς του,

β) την μετατόπιση του σώματος,

γ) το έργο μιας δύναμης για την οποία δεν γνωρίζουμε τα χαρακτηριστικά της και επομένως δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε κάποιον από τους δύο προηγούμενους τρόπους.

Βαρυτική δυναμική ενέργεια

❑ Έστω ότι ένα σώμα μάζας m βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το έδαφος. Εξαιτίας του βάρους του ή καλύτερα της βαρυτικής του αλληλεπίδρασης με την Γη, στο σώμα αποθηκεύεται ενέργεια η οποία ονομάζεται **βαρυτική δυναμική ενέργεια.** Επομένως ονομάζουμε βαρυτική δυναμική ενέργεια, την ενέργεια που έχει το σώμα λόγω της θέσης του μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης.

❑ Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος *ως προς το έδαφος* υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{U = mgh}$$

Το έδαφος ως προς το οποίο υπολογίζουμε την βαρυτική δυναμική ενέργεια λέγεται επίπεδο αναφοράς. Προφανώς στο επίπεδο αναφοράς είναι h=0, οπότε και U=0.

❑ <u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ</u>

i) Επειδή μας ενδιαφέρουν συνήθως οι μεταβολές της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, η επιλογή του επιπέδου αναφοράς είναι αυθαίρετη και εξαρτάται από τις συνθήκες του προβλήματος. **Συνήθως επιλέγουμε το επίπεδο αναφοράς να βρίσκεται στην κατώτερη θέση της τροχιάς του σώματος.** Οπότε δεν είναι υποχρεωτικά το έδαφος, αλλά οποιοδήποτε βολικό οριζόντιο επίπεδο μπορεί να θεωρηθεί ως επίπεδο αναφοράς.

ii) Η βαρυτική δυναμική ενέργεια αναφέρεται στην πραγματικότητα στο σύστημα σώμα – Γη και όχι αποκλειστικά στο σώμα. Επειδή όμως η κίνηση της Γης δεν επηρεάζεται από την παρουσία του σώματος (δηλαδή θα κινηθεί το σώμα προς τη Γη και όχι το αντίθετο) συνηθίζουμε να αποδίδουμε την δυναμική ενέργεια μόνο στο σώμα.

iii) Γενικότερα αν έχουμε ένα σύστημα δύο μαζών μεταξύ των οποίων υπάρχει προφανώς βαρυτική αλληλεπίδραση, ορίζουμε ως διαφορά της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος κατά τη διάρκεια κάποιας μετακίνησης των σωμάτων από την κατάσταση (1) στην κατάσταση (2), το έργο που παράχθηκε από την βαρυτική δύναμη για την μετακίνηση αυτή.

$$\boldsymbol{U_1 - U_2 = W_{1\to 2}}$$

Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι όταν τα σώματα του συστήματος βρίσκονται στην κατάσταση (2) έχουν μηδενική δυναμική ενέργεια (U_2=0), τότε ως δυναμική ενέργεια του συστήματος στην κατάσταση (1) ορίζεται το έργο της βαρυτικής δύναμης για να έρθει το σύστημα στην κατάσταση (2).

$$\boldsymbol{U_1 - 0 = W_{1\to 2} \Longrightarrow U_1 = W_{1\to 2}}$$

iv) Εντελώς όμοια με την βαρυτική δυναμική ενέργεια δύο μαζών ορίζεται και η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια δύο φορτίων.

Μηχανική ενέργεια

❑ Έστω ότι ένα σώμα κινείται μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης. Ορίζουμε ως μηχανική ενέργεια του σώματος το άθροισμα της κινητικής και της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος.

$$\boldsymbol{E = K + U}$$

❑ Αν το σώμα κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους του ή ασκούνται και άλλες δυνάμεις οι οποίες όμως δεν παράγουν έργο, η μηχανική ενέργεια του σώματος παραμένει σταθερή.

$$\boldsymbol{E = \sigma\tau\alpha\theta.} \text{ ή } \boldsymbol{K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}}$$

Η παραπάνω πρόταση είναι γνωστή ως **αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε)**.

Από τη σχέση: $E = \sigma\tau\alpha\theta. \Leftrightarrow \Delta E = 0 \Leftrightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\Delta K = -\Delta U}$

Δηλαδή η μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι αντίθετη από τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας.

❑ Η μηχανική ενέργεια επεκτείνεται έτσι ώστε να συμπεριλάβει και άλλες μορφές δυναμικής ενέργειας όπως είναι η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια και η δυναμική ενέργεια ελαστικά παραμορφωμένων σωμάτων.

Συντηρητικές (ή διατηρητικές) δυνάμεις

- Συντηρητικές λέγονται οι δυνάμεις των οποίων το έργο κατά μήκος κλειστής διαδρομής είναι μηδενικό.

- Μια άλλη ιδιότητα των συντηρητικών δυνάμεων είναι ότι το έργο τους μεταξύ δύο σημείων του χώρου, είναι ανεξάρτητο από την διαδρομή που ακολουθεί το σημείο εφαρμογής τους, αλλά εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση.

- **Γενικότερη διατύπωση της Α.Δ.Μ.Ε.**

Όταν κατά την μετακίνηση ενός σώματος ή ενός συστήματος σωμάτων παράγεται έργο μόνο από συντηρητικές δυνάμεις, τότε η μηχανική ενέργεια του σώματος ή του συστήματος αντίστοιχα διατηρείται σταθερή.

- Συντηρητικές δυνάμεις είναι οι βαρυτικές, οι ηλεκτρικές και οι δυνάμεις των ελαστικά παραμορφωμένων σωμάτων.

Η ισχύς

- Πολλές φορές δεν μας ενδιαφέρει τόσο το έργο που παράγει ένας κινητήρας ή μια δύναμη όσο ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε ένα μονόμετρο μέγεθος που ονομάζεται ισχύς, έτσι ώστε όσο γρηγορότερα παράγεται το έργο τόσο μεγαλύτερη να είναι η ισχύς.

- **Η ισχύς ενός κινητήρα ή μιας μηχανής είναι το πηλίκο του έργου W που παράγει, προς το χρονικό διάστημα t που παράγεται.** Δηλαδή ισχύει ο τύπος:

$$P = \frac{W}{t}$$

- Η μονάδα μέτρησης της ισχύος στο S.I. είναι το 1Watt = 1Joule/s

- **Η ισχύς εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο μια μηχανή παράγει έργο αλλά και τον ρυθμό με τον οποίο μια μορφή ενέργειας μετατρέπεται σε μια άλλη μορφή.** Για παράδειγμα αν η ισχύς ενός κινητήρα είναι P=8000Watt σημαίνει ότι ο κινητήρας για κάθε δευτερόλεπτο που περνά παράγει έργο 8000J ξοδεύοντας ίσο ποσό κάποιας μορφής ενέργειας.

- <u>Η έννοια της ισχύος επεκτείνεται και στις δυνάμεις</u>. Όταν λοιπόν λέμε ισχύς μιας δύναμης, εννοούμε τον ρυθμό με τον οποίο η δύναμη παράγει ή καταναλώνει έργο και κατά συνέπεια τον ρυθμό με τον οποίο αυτή η ενέργεια μετατρέπεται από μια μορφή σε μια άλλη ή μεταφέρεται από ένα σώμα σε ένα άλλο. Ο τύπος υπολογισμού είναι:

$$P = F.\upsilon$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση που τόσο η δύναμη όσο και η ταχύτητα μεταβάλλονται, μόνο που τότε υπολογίζεται έτσι η στιγμιαία ισχύς.