



**Θετικής - Τεχνολογικής  
Κατεύθυνσης  
Μαθηματικά Β' Λυκείου  
Ευθεία**

**Επιμέλεια: ΜΑΧΗ ΣΚΟΥΦΑ  
ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΗΛΙΑΣΚΟΣ**

e-mail: [info@iliaskos.gr](mailto:info@iliaskos.gr)

[www.iliaskos.gr](http://www.iliaskos.gr)

## ΕΥΘΕΙΑ

1. Να βρεθεί αν υπάρχει ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας:
  - α) Που περνά από το σημείο A(-1,3) και B(2,-1)
  - β) Που περνά από το σημείο Γ(-1,0) και Δ(2,0)
  - γ) Που είναι κάθετη στην ΓΔ
2. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x'x η ευθεία:
  - α) Που περνά από τα σημεία A(2,-3) και B(3,-4)
  - β) Που περνά από τα σημεία Γ(0,-2) και Δ(0,3)
  - γ) Που περνά από τα σημεία E(4,-2) και Z(1,-2)
3. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο A(2,3) και είναι:
  - α) Παράλληλη στην ευθεία δ:  $y = -2x + 1$
  - β) Κάθετη στην ευθεία δ:  $y = -\frac{1}{3}x + 2$
  - γ) Παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (2, 0)$
  - δ) Κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (2, 0)$
  - ε) Παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (0, 2)$
  - ζ) Κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (0, 2)$
4. α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A(-2,3) και σχηματίζει γωνία  $\varphi = 30^\circ$   
β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A(3,-3) και σχηματίζει γωνία  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$
5. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τους άξονες στα σημεία:
  - α) A(4,0) και B(0,4)
  - β) A(-3,0) και B(0,1)
6. Δύο ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι παράλληλες προς το διάνυσμα  $\vec{v} = (1, a^2 + 2a - 3)$  και  $\vec{u} = (1, -a^2 + 6a + 3)$  αντίστοιχα. Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
7. Να αποδειχθεί ότι τα παρακάτω σημεία είναι συνευθειακά:
  - α) A(1,2), B(2,0), Γ(4,-4)
  - β) A(α,β), B(β,α), Γ( $\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2}$ )Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία αυτά.
8. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών:
  - α)  $\varepsilon_1: 3x - y + 1 = 0$  και  $\varepsilon_2: -6x + 2y - 3 = 0$
  - β)  $\varepsilon_1: x = 4$  και  $\varepsilon_2: x = -6$
  - γ)  $\varepsilon_1: y = x$  και  $\varepsilon_2: y = x - 3$
9. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοκάθετη στο τμήμα AB με:
  - α) A(-2,1) και B(2,3)

- β)  $A(3,0)$  και  $B(0,-5)$   
 γ)  $A(2,-2)$  και  $B(-4,-2)$
10. Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(-2,-3)$ ,  $B(3,2)$ ,  $\Gamma(1,4)$ . Να βρεθούν οι εξισώσεις της διαμέσου, του ύψους και της μεσοκαθέτου που αντιστοιχούν στην πλευρά  $B\Gamma$ .
  11. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  αν τα σημεία  $K(1,4)$ ,  $\Lambda(-3,3)$  και  $M(-4,2)$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB, A\Gamma, B\Gamma$  αντίστοιχα.
  12. Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $A(1,1)$ . Η διάμεσος  $BM$  και το ύψος  $\Gamma\Delta$  έχουν αντίστοιχα εξισώσεις  $x-y+4=0$  και  $3x+y+4=0$ . Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.
  13. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB:y=2x$  και  $A\Gamma:3x-y-1=0$ . Αν το σημείο  $M(1,0)$  είναι μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ , να βρείτε την εξίσωση της πλευράς  $B\Gamma$
  14. Να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς  $B\Gamma$  ενός τριγώνου  $AB\Gamma$ , αν  $A(1,2)$  και οι εξισώσεις των δύο διχοτόμων του είναι  $x+2=0$  και  $y=x+5$
  15. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(1,2)$ ,  $B(3,-1)$ ,  $\Gamma(-2,-4)$ . Να βρείτε:
    - α) της πλευράς  $B\Gamma$
    - β) της διαμέσου  $BM$
    - γ) της ευθείας  $\epsilon$  που είναι παράλληλη στη  $B\Gamma$
    - δ) του ύψους  $A\Delta$
  16. Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές  $A(-3,4)$ ,  $B(-1,0)$ ,  $\Gamma(3,2)$ . Να υπολογιστούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.
  17. Έστω τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία  $A(5,4)$ ,  $B(6,6)$ ,  $\Gamma(6,11)$ ,  $\Delta(1,1)$ . Να βρεθεί το είδος του τετραπλεύρου.
  18. Να βρείτε τις γραμμές που παριστάνουν οι παρακάτω εξισώσεις:
    - α)  $xy=0$
    - β)  $|x| - |y|=0$
    - γ)  $x^2-3x+2=0$
  19. α) Να βρεθεί το σημείο τομής των  $\epsilon_1:y=2x+4$ ,  $\epsilon_2:y=-3x-1$   
 β) Να βρεθεί ο  $\alpha$ , ώστε οι  $\epsilon_1:y=2x+\alpha^2-2$  και  $\epsilon_2:y=\alpha x+2$  να τέμνονται πάνω στον  $y'y$
  20. Να βρεθεί το σημείο  $M$  έτσι ώστε με τα σημεία  $O(0,0)$ ,  $A(2,4)$ ,  $B(4,0)$  να σχηματίζει τα τρίγωνα  $OMA$  και  $AMB$  ισοσκελή με κορυφή το  $M$ .
  21. Δίνεται η ευθεία  $\epsilon:y=-x+4$  και το σημείο  $A(5,5)$ . Να βρεθούν:
    - α) Σημείο  $B$  συμμετρικό του  $A$  ως προς την  $\epsilon$
    - β) Σημείο  $\Gamma$  συμμετρικό του  $A$  ως προς το  $B$
  22. Έστω παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με κορυφές τα σημεία  $A(0,4)$ ,  $B(6,6)$ ,  $\Gamma(7,3)$ . Να βρεθούν οι προβολές  $K, \Lambda$  των  $A$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα στην  $B\Delta$ . Κατόπιν να αποδειχθεί ότι το  $AK\Lambda\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο.
  23. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι συμμετρική της  $\epsilon:y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$  ως προς την  $\delta:y=-3x+\frac{3}{2}$ .
  24. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο  $A(-2,1)$  και ορίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

25. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο  $A(-3,2)$  και ορίζει με τους αρνητικούς ημιάξονες τρίγωνο εμβαδού 4.
26. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στις ευθείες  $\delta_1: y=2x-3$ ,  $\delta_2: y=2x+6$  και απέχει από τη  $\delta_2$  διπλάσια απόσταση από τη  $\delta_1$ .
27. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο  $M(1,4)$ , τέμνει τις ευθείες  $\delta_1: y=-x+4$ ,  $\delta_2: y=2x+3$  στα  $A, B$  αντίστοιχα, έτσι ώστε το  $M$  να είναι μέσο της  $AB$ .
28. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο  $A(0,1)$  και τέμνει τις ευθείες  $\delta_1: y=\frac{1}{2}x$ ,  $\delta_2: y=\frac{1}{2}x+1$  στα  $B, \Gamma$  αντίστοιχα, έτσι ώστε το μήκος της  $B\Gamma$  να είναι 1.
29. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών  $A, \Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$  το οποίο έχει κορυφή το σημείο  $B(3,-3)$ , ορθόκентρο το  $H(1,3)$  και εξίσωση διχοτόμου  $y=x-1$ .
30. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών  $A$  και  $\Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$ , που έχει κορυφή το σημείο  $B(-3,3)$ , ύψος  $AK: x+3y=10$  και διχοτόμο  $AD: x+2y=7$ .
31. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής  $A$  τριγώνου  $AB\Gamma$  που έχει κορυφές το  $B(2,-10)$ ,  $\Gamma(4,6)$  και το σημείο  $H(2,5)$  ορθόκентρο.
32. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών τριγώνου  $AB\Gamma$  που έχει ύψος  $AK: y=-x+5$ , διάμεσο  $AM: 2x+3y=14$  και το σημείο  $N(4, \frac{9}{2})$  μέσο της  $A\Gamma$ .
33. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών τριγώνου  $AB\Gamma$  που έχει ύψος  $AK: x+y=5$ , πλευρά  $A\Gamma: y=5x-19$  και για το σημείο  $M(1,1)$  είναι  $\vec{AM} - 3\vec{MB} = \vec{0}$ .
34. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών  $B, \Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$  που έχει διαμέσους τις  $\varepsilon_1: y=-x+7$ ,  $\varepsilon_2: x=2$  και κορυφή  $A(4,5)$ .
35. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών  $B, \Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$  που έχει ύψη τις ευθείες  $\varepsilon_1: y=-x+10$ ,  $\varepsilon_2: x+2y=7$  και κορυφή  $A(4,3)$ .
36. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών  $B, \Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$  που έχει πλευρά την ευθεία  $y=-2x-2$ , διάμεσο την ευθεία  $y=-5x-2$  και κορυφή  $A(1,2)$ .
37. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών  $A, \Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$  που έχει μεσοκάθετο την  $B\Gamma$  την ευθεία  $y=2x+5$ , κορυφή  $B(1,2)$  και κέντρο βάρους  $G$  το σημείο  $(0,4)$ .
38. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών τριγώνου  $AB\Gamma$  που έχει πλευρές τις ευθείες  $\varepsilon_1: y=2x+6$ ,  $\varepsilon_2: 2y+x=7$  και διχοτόμο την ευθεία  $\delta: y=1$ .
39. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών τριγώνου  $AB\Gamma$  που έχει πλευρές τις ευθείες  $\varepsilon_1: 2x-5y+2=0$ ,  $\varepsilon_2: x+2y-8=0$  και κέντρο βάρους  $G(3,1)$ .
40. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών παραλληλόγραμμου το οποίο έχει μια κορυφή το σημείο  $(-1,1)$  και δύο πλευρές με εξισώσεις  $\varepsilon_1: 2x+3y=14$  και  $\varepsilon_2: 3x-2y=8$ .

41. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των υπολοίπων κορυφών παραλληλογράμμου που έχει δύο κορυφές τα σημεία  $(1,2)$  και  $(0,-1)$  και το κέντρο του  $O(1, \frac{5}{2})$ .
42. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών τετραγώνου που έχει κορυφή το  $A(1,6)$  μια πλευρά του παράλληλη στην διχοτόμο του  $1^{\text{ου}}$  τεταρτημορίου και μία του διαγώνιο με εξίσωση  $\delta:y=3$ .
43. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών ρόμβου που έχει κορυφή  $(1,3)$ , μια πλευρά του με εξίσωση  $\epsilon:y=-2x+5$  και μια διαγώνιο του με εξίσωση  $\delta:y=x-1$ .
44. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών ισοσκελούς τραπεζίου που έχει κορυφή το σημείο  $(7, 1)$ , διάμεσο  $\delta:y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{6}$  και μία του πλευρά με εξίσωση  $\epsilon:x=1$ .
45. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών τριγώνου  $AB\Gamma$ , που έχει  $M(-1,4)$  και  $N(2,7)$  τα μέσα δύο πλευρών και  $K(2,5)$  το ίχνος του ύψους που φέρνουμε προς την τρίτη πλευρά.
46. Έστω ορθογώνιο  $OAB\Gamma$ . Από την κορυφή  $O$  φέρνουμε  $O\Gamma \perp A\Gamma$ . Από το σημείο  $K$  της διαγωνίου  $A\Gamma$  φέρνουμε παράλληλες ευθείες στις πλευρές και έστω  $\Delta, E, Z, H$  τα σημεία που αυτές τέμνουν τις  $OA, AB, B\Gamma$  και  $O\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδειχθούν:  
 α)  $\lambda_{EZ} = \lambda_{A\Gamma}^3$  και  $\lambda_{\Delta H} = \frac{1}{\lambda_{A\Gamma}}$   
 β) Οι ευθείες  $A\Gamma, EZ, \Delta H$  συντρέχουν.
47. Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) και το ύψος του  $AD$ . Από το  $A$  φέρνουμε κάθετη στην  $A\Gamma$  που τέμνει τη  $B\Gamma$  στο  $E$ . Αν  $M$  το μέσο της  $AE$ , να αποδειχθεί ότι  $DM \perp AB$ .
48. Έστω παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB=2B\Gamma$ . Να αποδειχθεί ότι  $AM \perp BM$ , όπου  $M$  το μέσο της  $\Gamma\Delta$ .
49. Έστω τα σημεία  $A, B, \Gamma$  του θετικού ημιάξονα  $Ox$  με τετμημένες  $\alpha, \beta, \gamma$  αντίστοιχα. Από τυχαίο σημείο  $\Sigma$  του άξονα  $y'$  φέρνουμε  $A\Sigma, B\Sigma, \Gamma\Sigma$  που τέμνουν την ευθεία  $y=\delta$  στα  $K(\kappa, \delta), \Lambda(\lambda, \delta), M(\mu, \delta)$  αντίστοιχα.  
 α) Αν τα  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να δειχθεί ότι και τα  $\kappa, \lambda, \mu$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.  
 β) Αν τα  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να δειχθεί ότι και τα  $\kappa, \lambda, \mu$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
50. Να βρεθεί ο  $\alpha$  ώστε τα σημεία  $A(\eta\mu\alpha, \sigma\upsilon\eta\alpha), B(-\sigma\upsilon\eta\alpha, \eta\mu\alpha), \Gamma(1, 1)$  να είναι συνευθειακά.
51. Να βρείτε τις γραμμές που παριστάνουν οι παρακάτω εξισώσεις:  
 α)  $x(y-1)=0$   
 β)  $x^2-y^2=0$   
 γ)  $y^2-3y-4=0$
52. Με υποτείνουσα το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  που η ευθεία  $\epsilon:y=-3x+\frac{3}{2}$  ορίζει με τους άξονες, κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AMB$ . Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής  $M$ .

53. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία  $\delta: y = \frac{2}{3}x$ , τέμνει τους άξονες στα σημεία  $A(\alpha, 0)$  και  $B(0, \beta)$ , έτσι ώστε  $\alpha + \beta = 15$ .
54. Τα σημεία  $A$  και  $B$  κινούνται στους θετικούς ημιάξονες  $Ox$  και  $Oy$  αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύει  $(OA) + (OB) = 2$ . Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας  $AB$  που σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με το μέγιστο δυνατόν εμβαδό.
55. Δίνεται η εξίσωση:  $(2\lambda - \kappa)x + (\lambda^2 - 1)y + 2\lambda = 0$  με  $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τις τιμές των  $\lambda, \kappa$  ώστε η εξίσωση να παριστάνει ευθεία.
56. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση:  $(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2\lambda = 0$  (1), όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , διέρχονται από το ίδιο σημείο  $A$  και μετά να βρείτε εκείνη την ευθεία  $\varepsilon$  που ορίζεται από την (1) και είναι κάθετη στην ευθεία  $\eta: y = 2x$ .
57. Δίνονται οι ευθείες:  $\varepsilon_1: (\mu - 1)x - (\mu - 2)y - \mu = 0$  και  $\varepsilon_2: (\mu - 2)x - (\mu + 1)y - 3 = 0$ . Να βρείτε το  $\mu$  ώστε:
- Οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  να τέμνονται
  - $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
  - $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$
58. Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών  $\varepsilon_1: y = (-2 + \sqrt{3})x$  και  $\varepsilon_2: y = -x$ .
59. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 3y^2 - 2x + 1 = 0$  (1).
- Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x'x$ .
  - Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .
60. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων:
- $M(\lambda - 1, 2\lambda - 3)$
  - $M(-3, \lambda + 1)$
  - $M(\lambda^2 + 1, 2)$
  - $M(-3, \eta\mu\lambda)$
61. Αν το σημείο  $N$  κινείται πάνω στην ευθεία  $\varepsilon: y - x + 1 = 0$ , να βρείτε που κινείται το συμμετρικό  $M$  του σημείου  $N$  ως προς την ευθεία  $\eta: x + 2y - 2 = 0$ .
62. Να αποδείξετε ότι το σημείο  $M(3 - \sin^2\theta, 1 - \eta\mu^2\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  κινείται σε σταθερή ευθεία.
63. Δίνεται η οικογένεια των ευθειών με εξίσωση:  $(-\lambda^2 - 1)x + (\lambda^2 + \lambda + 1)y = 0$  (1)  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  από τα οποία διέρχεται μία μόνο ευθεία που ορίζεται από την εξίσωση (1).
64. Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: y = \sqrt{3}x$  και  $\varepsilon_2: y = x$
- Να βρείτε τις γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες με τον άξονα  $x'x$
  - Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .
65. Δίνονται τα σημεία  $A(-2, 3), B(1, \lambda^2), \Gamma(\mu - 1, 4)$
- Να βρείτε το  $\lambda$ , ώστε η ευθεία  $AB$  να σχηματίζει με τον  $x'x$  γωνία  $150^\circ$
  - Να βρείτε τα  $\lambda, \mu$  ώστε η ευθεία  $B\Gamma$  να είναι κατακόρυφη.
  - Να βρείτε τα  $\lambda, \mu$  ώστε η ευθεία  $B\Gamma$  να είναι παράλληλη στον άξονα  $xx$ .

66. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία είναι κάθετη στην  $\epsilon: 2x+3y-1=0$  στο σημείο που τέμνει η  $\epsilon$  τον άξονα  $y'y$ .
67. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $A(-2,0)$  και είναι παράλληλη στην διχοτόμο της γωνίας  $x'Oy$ .
68. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία  $\epsilon: y=3x-1$ .
69. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $B(0,3)$  και είναι κάθετη στην διχοτόμο της γωνίας  $x'Oy$ .
70. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία που ορίζεται από τα σημεία  $A(-1,2)$  και  $B(3,-2)$ .
71. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο τομής  $A$  των ευθειών  $\epsilon_1: x-y+3=0$  και  $\epsilon_2: 2x+y-6=0$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $\eta: 3x+2y-5=0$  και μετά το πλησιέστερο σημείο της  $\epsilon$  από το  $O$ .
72. Αν για τις συντεταγμένες  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  ισχύουν:  $2x_1+y_1+3=0$  και  $2x_2+y_2+3=0$ , να βρείτε την εξίσωση της  $AB$ .
73. Έστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha}=(-2,3)$  και  $\vec{\beta}=4\vec{j}$ . Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\epsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $A(-1,3)$  και είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{v} = 3\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta}$  και μετά το πλησιέστερο σημείο της  $\epsilon$  από το  $O$ .
74. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(-1,2)$ . Αν η εξίσωση της μιας πλευράς του είναι  $x-2y+1=0$  και το ύψος  $B\Delta$  έχει εξίσωση  $x-y+1=0$ , να βρείτε τις κορυφές του  $B$  και  $\Gamma$ .
75. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB: y=3x$  και  $A\Gamma: x-y+2=0$ . Αν το σημείο  $M(1,2)$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ , να βρείτε την εξίσωση της  $B\Gamma$ .
76. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην ευθεία  $\eta: y=\frac{1}{2}x+2$  και τέμνει τους άξονες στα σημεία  $A$  και  $B$  ώστε το άθροισμα της τετμημένης του  $A$  και της τεταγμένης του  $B$  να είναι ίσο με 3.
77. Αν η ευθεία  $\epsilon: x-2y+1=0$  είναι μεσοπαράλληλος των  $\epsilon_1: x-2y+\alpha=0$  και  $\epsilon_2: 2x-4y+\alpha+2=0$ , να βρείτε το  $\alpha$ .
78. Να σχεδιάσετε τις γραμμές τις οποίες παριστάνουν οι εξισώσεις:  
 α)  $x^2-y^2+6y-9=0$   
 β)  $4x^2-y^2-4x-2y=0$   
 γ)  $x^2-4xy+3y^2=0$   
 δ)  $2x^2-2xy-y^2=0$ .
79. Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις να παριστάνει ευθεία γραμμή  
 α)  $(\lambda^2-4)x+(\lambda-2)y+1=0$   
 β)  $x\eta\theta+y\sigma\upsilon\nu\theta-3=0$ .
80. Να βρείτε τα  $\kappa, \lambda$  ώστε η εξίσωση  $(\kappa-2)x+(\lambda+\kappa-3)y-1=0$  να παριστάνει ευθεία γραμμή.
81. Να αποδείξετε ότι κάθε μία από τις παρακάτω ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο  
 α)  $x-y + \lambda(2x+y-3)=0$

- β)  $2\chi\sigma\upsilon\nu^2\theta + \gamma\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu 2\theta - 1 = 0$
82. Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε η ευθεία  $(\lambda-1)x + (\lambda^2-3)y + \lambda^3 + 1 = 0$
- να είναι παράλληλη στον  $x'x$
  - να είναι παράλληλη στον  $y'y$
  - να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
83. Δίνεται η εξίσωση  $2\lambda x + (\lambda^2-1)y - 2\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$  (1)
- Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda$
  - Να δείξετε ότι δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1).
84. Δίνεται η εξίσωση  $x - y + 1 + \lambda(x + 2y - 1) = 0$  (1)
- Να αποδείξετε ότι η (1) παριστά ευθεία
  - Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο
  - Να βρείτε την ευθεία που ορίζεται από την (1) και
    - διέρχεται από το  $A(-1, 2)$
    - διέρχεται από την αρχή των αξόνων
    - είναι παράλληλη στον  $x'x$
    - είναι παράλληλη στον  $y'y$
    - σχηματίζει με τον  $x'x$  γωνία  $\omega = 135^\circ$
    - είναι κάθετη στο  $\vec{\delta} = (1, 3)$
85. Έστω οι ευθείες  $\epsilon_1: (\lambda-1)x + \lambda y = \lambda$  και  $\epsilon_2: \lambda x + (\lambda+1)y = 2\lambda$
- Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  τέμνονται για κάθε  $\lambda$
  - Να βρείτε το σημείο τομής των δύο ευθειών.
86. Δίνονται οι ευθείες  $\epsilon_1: (\lambda-1)x - (\lambda+5)y - 1 = 0$  και  $\epsilon_2: x + (\lambda+1)y + \lambda + 3 = 0$
- Να αποδείξετε ότι οι  $\epsilon_1, \epsilon_2$  τέμνονται για οποιαδήποτε τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$
  - Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε οι ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  να τέμνονται κάθετα.
87. Δίνονται τα σημεία  $A(1, 5)$  και  $B(2, 1)$ . Να βρείτε σημείο  $M$  της ευθείας  $x - y = 0$  τέτοιο ώστε το τρίγωνο  $AMB$  να είναι ορθογώνιο στο  $M$ .
88. Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών  $\epsilon_1: (\lambda-1)x + (\lambda+1)y - 1 = 0$  και  $\epsilon_2: \lambda x + y + 2 = 0$
89. Δίνεται η εξίσωση  $y^2 - 3x^2 = 0$  (1)
- Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες
  - Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  κάθε μία από τις παραπάνω δύο ευθείες
  - Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζει η ευθεία  $\eta: x + y = 0$  με τις δύο ευθείες.
90. Δίνεται η ευθεία  $\epsilon: x + y\sqrt{3} + 1 = 0$
- Να βρείτε την εξίσωση της συμμετρικής ευθείας  $\epsilon'$  της  $\epsilon$  ως προς τον  $x'x$
  - Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι  $\epsilon, \epsilon'$ .
91. Αν  $A(\lambda-1, 2)$ ,  $B(2\lambda-3, \lambda+1)$  και  $\Gamma(3\lambda, 2\lambda)$  να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  ώστε  $\vec{AM} = 2\vec{B\Gamma}$ .



92. Έστω μία ευθεία (η) με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda=1$ , κινείται και τέμνει τις ευθείες  $\varepsilon_1: x+y-2=0$  και  $\varepsilon_2: 2x-y-1=0$  στα σημεία A,B αντιστοίχως. Να βρείτε που κινείται το σημείο M για το οποίο ισχύει  $\overline{AM} = 2\overline{MB}$
93. Έστω οι ευθείες  $\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda-1)y - 2 = 0$  και  $\varepsilon_2: (\lambda+1)x + \lambda y - 3 = 0$
- Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  τέμνονται για οποιαδήποτε τιμή του  $\lambda$
  - Να βρείτε το σημείο τομής M των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$
  - Να δείξετε ότι το σημείο M βρίσκεται σε σταθερή ευθεία.
94. Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - y^2 + \lambda^2 + 4\lambda x + 2\lambda y + 3\lambda^2 = 0$  (1),  $\lambda \in \mathbb{R}$
- Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δυο ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  που είναι κάθετες
  - Να βρείτε το σημείο τομής M των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
  - Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M.
95. Δίνονται οι οικογένειες των ευθειών που ορίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου από τα οποία :
- διέρχεται μία μόνο ευθεία της οικογένειας των ευθειών:
    - $x - 2y + \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$
    - $(\lambda^2 + \lambda + 1)x - 2(\lambda^2 - 1)y = 0, \lambda \in \mathbb{R}$
  - δεν διέρχεται καμία ευθεία της οικογένειας των ευθειών  
 $(\lambda + 2)x - (2\lambda + 1)y + 3 = 0$
96. Οι εξισώσεις των δύο πλευρών ενός τετραγώνου ABΓΔ είναι  $\varepsilon_1: 2x - y + 1 = 0$  και  $\varepsilon_2: y = 2x + 5$ . Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου.
97. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A(3,4) και απέχει από το σημείο M(0,2) απόσταση ίση με 3 μονάδες.
98. Η ευθεία η:  $x + 2y - 3 = 0$  είναι μεσοπαράλληλη δύο ευθειών που απέχουν απόσταση  $d = 2\sqrt{5}$ . Να βρείτε τις εξισώσεις αυτών των ευθειών.
99. Δίνονται τα σημεία A(-1,2) και B(0,1) και η ευθεία  $\varepsilon: x - 2y + 1 = 0$ . να βρείτε το σημείο M της ευθείας  $\varepsilon$ , ώστε το εμβαδόν του τριγώνου MAB να είναι ίσο με 1.
100. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο M(-1,2) και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό ίσο με 2.
101. Δίνονται τα σημεία A(-1,2) και B(-5,4)
- Να βρείτε την μεσοκάθετο του τμήματος AB
  - Να βρείτε το σημείο της ευθείας:  $x - y + 1 = 0$  που ισαπέχει από τα σημεία A και B.
102. Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: 4x - 2y + 1 = 0$  και  $\varepsilon_2: y = 2x - 3$ .
- Να δείξετε ότι  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
  - Να υπολογίσετε την απόσταση των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
103. Έστω το τετράγωνο ABΓΔ με A(-1,2) και η εξίσωση της μιας πλευράς του είναι  $x - 2y + 1 = 0$ . Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου ABΓΔ.

104. Οι εξισώσεις των δύο πλευρών ενός τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $\varepsilon_1: 3x-y+1=0$  και  $\varepsilon_2: y=3x+5$ . Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ .
105. Να βρείτε τα σημεία της  $\varepsilon: x+y-1=0$ , τα οποία απέχουν από την ευθεία  $\eta: y=2x-1$  απόσταση ίση με  $\sqrt{5}$ .
106. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που απέχει από την αρχή των αξόνων 3 μονάδες και  
 α) έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda=2$   
 β) είναι κάθετη στο  $\vec{\delta} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$
107. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(-1,3)$  και απέχει από το σημείο  $M(2,1)$  απόσταση ίση με 3 μονάδες.
108. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\eta$  οποία διέρχεται από το σημείο  $M(-1,2)$  και ισαπέχει από τα σημεία  $A(-3,0)$  και  $B(1,3)$ .
109. Να βρείτε το σημείο του άξονα  $y'y$  που ισαπέχει από την αρχή των αξόνων και από την ευθεία  $\varepsilon: 4x-3y-1=0$ .
110. Να βρείτε την ευθεία της οικογένειας ευθειών που ορίζονται από την εξίσωση  $\varepsilon_\lambda: y-1+\lambda(x+y)=0$ , που απέχει από το σημείο  $A(0,1)$  απόσταση ίση με 1.
111. Δίνονται οι ευθείες:  $\varepsilon_1: \mu x+y+1=0$  και  $\varepsilon_2: x+\mu y+3\lambda=0$ . Να βρείτε τις τιμές των  $\lambda, \mu$  ώστε οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  να είναι παράλληλες και η απόστασή τους να είναι ίση με  $\sqrt{2}$ .
112. Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες  $\varepsilon_1: y=2x-1$  και  $\varepsilon_2: 2x-4y-1=0$ .
113. Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: x-2y+1=0$  και  $\varepsilon_2: y=2x$ . Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  για τα οποία ισχύει  $\frac{d(M, \varepsilon_1)}{d(M, \varepsilon_2)}=2$ .
114. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\vec{AB} = (2,3)$  και  $\vec{B\Gamma} = 3\vec{i} - \vec{j}$ . Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
115. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\vec{AB} = (1,2)$  και  $\vec{B\Gamma} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ . Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
116. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $M$  μέσον του  $B\Gamma$ . Αν  $\vec{AM} = (2,3)$  και  $\vec{B\Gamma} = (-1,2)$ , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
117. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{AB} = (-3,6)$  και  $\vec{PM} = (-1,3)$ . Αν ισχύει  $\vec{AM} = 2\vec{BM}$ , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $PAB$ .
118. Έστω οι ευθείες  $\varepsilon_1: y=2x$  και  $\varepsilon_2: y=-3x$  και η ευθεία που τέμνει αυτές στα σημεία  $A$  και  $B$ . Αν το σημείο  $M(1,1)$  είναι το μέσο του τμήματος  $AB$ , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$ .
119. Δίνονται τα σημεία  $A(-1,2)$ ,  $B(3,-2)$  και  $\Gamma(0,2)$ .  
 i) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .  
 ii) Αν το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο, να βρείτε το εμβαδόν αυτού.  
 iii) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $OAB\Gamma$ .
120. Έστω ότι τα διανύσματα θέσης των σημείων  $A, B, \Gamma$  είναι τα:

$$\vec{\alpha} = (1,2), \vec{\beta} = (-1,3) \text{ και } \vec{\gamma} = 2\vec{\gamma}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.  
 ii) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.
121. Έστω τα σημεία A (-1,2), B (2,-1) και Γ (λ-1, λ-1).  
 i) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε τα σημεία A,B,Γ να αποτελούν κορυφές τριγώνου.  
 ii) Να βρείτε το λ, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ να είναι 3.
122. Έστω τα σημεία A (-3,1) και B (2,-1). Να βρείτε σημείο M στον άξονα y'y ώστε το εμβαδόν του τριγώνου MAB να είναι ίσο με 3.
123. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη με την ευθεία  $x+2y-1=0$  και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 1.
124. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A (4,3) και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 24.
125. Δίνονται τα σημεία A (2,-1) και B (1,3) και η ευθεία ε:  $x-y+1=0$ . Να βρείτε σημείο M της ευθείας ε ώστε το εμβαδόν του τριγώνου MAB να είναι ίσο με 2.
126. Δίνονται τα σημεία A (2,-1) και B (1,3). Να βρείτε το σύνολο των σημείων M για τα οποία ισχύει  $(MAB)=3$ .
127. Έστω τα σημεία A (0,1), B (-1,2) και Γ (1,-2). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει  $(MAB)=3(ABΓ)$ .
128. Δίνεται η εξίσωση:  $6x^2-y^2=xy, (1)$   
 i) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ .  
 ii) Να βρείτε την οξεία γωνία  $\theta$  που σχηματίζουν οι  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ .  
 iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M (0,1) τέμνει τις  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  στα σημεία A και B αντίστοιχα ώστε το M να είναι μέσο του τμήματος AB.
129. A. Δίνεται η ευθεία  $\delta$  με εξίσωση:  $(\alpha^3-1)x+(2\alpha+1)y+\alpha^3-1=0$ ,  $\alpha$  πραγματικός αριθμός. Να εξετάσετε αν η ευθεία  $\epsilon$ :  $x-2006y=-1$  ανήκει στην οικογένεια των ευθειών  $\delta$ .  
 B.  $(\alpha^2+2\alpha)x-(\alpha^2+\alpha+1)y-\alpha^2-2=0, \alpha \in \mathbb{R} (1)$   
 α) Να δείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του  $\alpha$  η (1) είναι εξίσωση ευθείας.  
 β) Να βρείτε το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες της οικογένειας.  
 γ) Να βρείτε την ευθεία της οικογένειας που είναι κάθετη στην ευθεία  $\epsilon$ :  $x-y+3=0$ .  
 δ) Να δείξετε ότι η ευθεία:  $y=2x+1$  δεν ανήκει στην οικογένεια.
130. A. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\epsilon$  που διέρχεται από το σημείο A (1,-2) και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν  $E=1$  τ.μ.  
 B. Δίνονται τα σημεία A (-1,2), B (0,1) και η ευθεία  $\epsilon$ :  $x-2y+1=0$ . Να βρείτε σημείο M της ευθείας  $\epsilon$ , ώστε το εμβαδόν του τριγώνου MAB να είναι ίσο με 1.

131. Οι συντεταγμένες δύο πλοίων  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  για κάθε χρονική στιγμή  $t(t \geq 0)$  είναι:  $\Pi_1(t, t+3), \Pi_2(2t-5, t+1)$ .
- α) Να βρείτε την απόσταση των πλοίων την χρονική στιγμή  $t=3$ .
- β) Να βρείτε τις γραμμές στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.
- γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση:
- i) να συναντηθούν οι πορείες τους
- ii) να συγκρουσθούν τα πλοία
- δ) Αν  $\Lambda(3,4)$  είναι οι συντεταγμένες ενός λιμανιού:
- i) να δείξετε ότι το πλοίο  $\Pi_1$  δεν κατευθύνεται στο λιμάνι  $\Lambda$  και να βρείτε την ελάχιστη απόσταση της πορείας του πλοίου από το λιμάνι
- ii) να βρείτε την χρονική στιγμή κατά την οποία το πλοίο  $\Pi_1$  διέρχεται από το πλησιέστερο σημείο του λιμανιού  $\Lambda$ .
132. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^2+y^2-2xy-(\lambda^2+1)x+(\lambda^2+1)y+\lambda^2=0$  παριστάνει δύο ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  παράλληλες μεταξύ τους για κάθε τιμή του  $\lambda > 1$ .
- β) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  έτσι ώστε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  να ισούται με 2 τ.μ.
133. Δίνονται τα σημεία  $A(\kappa-2, \kappa+2)$ ,  $B(2\kappa-1, \kappa+3)$  και  $\Gamma(1, 2)$
- α) Να δείξετε ότι για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$  τα  $A, B, \Gamma$  είναι κορυφές τριγώνου και να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του κέντρου βάρους του.
- β) Αν η γωνία  $\Gamma=45^\circ$  να υπολογίσετε το εμβαδόν του  $AB\Gamma$ .
134. Δίνονται οι ευθείες  $\delta_1: 2\mu x - (\mu+1)y - 3\mu + 1 = 0$  και  $\delta_2: (3\mu+1)x + (\mu-1)y - 6\mu + 2 = 0$
- α) Να δείξετε ότι κάθε μία από αυτές ορίζει οικογένεια ευθειών των οποίων να προσδιορίσετε τα σταθερά σημεία από τα οποία διέρχονται.
- β) Να βρείτε την οξεία γωνία των  $\delta_1, \delta_2$  για κάθε  $\mu \in \mathbb{R}$ .
135. Δίνεται η εξίσωση  $\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 + 2\alpha x + 1 = 0$ , όπου  $\alpha, \beta > 0$
- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του  $\lambda$  οι ευθείες τέμνονται.
- β) Αν  $A$  το σημείο τομής των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ ,  $\Gamma$  το συμμετρικό του  $A$  ως προς την αρχή  $O$  και  $B, \Delta$  τα σημεία που οι ευθείες τέμνουν τον  $y'y$ , να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ .
136. Α. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις  $\varepsilon_1: (2\lambda+1)x - 3\lambda y - 2 = 0$  και  $\varepsilon_2: \lambda x + (\lambda+2)y + 1 = 0$
- α) Να δείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του  $\lambda$  οι ευθείες τέμνονται.
- β) να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε οι ευθείες να τέμνονται κάθετα.
- Β. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις:
- $\varepsilon_1: (\mu-1)x - (\mu-2)y - \mu = 0$  και  $\varepsilon_2: (\mu-2)x - (\mu+1)y - 3 = 0$ . Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $\mu$  ώστε:
- α) οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  να τέμνονται
- β)  $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$
- γ)  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
- Γ. Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: (\lambda-1)x + \lambda y = 3\lambda$  και  $\varepsilon_2: \lambda x + (\lambda+1)y = 3\lambda + 1$
- α) Να δείξετε ότι οι  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  τέμνονται για κάθε πραγματική τιμή του  $\lambda$
- β) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι ευθεία ( $\eta$ ).

- γ) Αν  $A(-1,2)$  να βρείτε το σημείο  $B$  της ευθείας  $(\eta)$  που να απέχει από την ευθεία  $OA$  απόσταση ίση με  $\sqrt{5}$ .
- δ) Να βρείτε σημείο  $N$  της ευθείας  $(\eta)$  ώστε το εμβαδόν του τριγώνου  $NAO$  να είναι 2.
137. Τα δύο ύψη ενός τριγώνου βρίσκονται στις ευθείες  $2x-3y+1=0$ ,  $x+y=0$  και οι συντεταγμένες της κορυφής  $A$  είναι  $(1,2)$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες των άλλων δύο κορυφών.
138. Η διχοτόμος  $AD$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  έχει εξίσωση  $y=2x$ , η διάμεσος  $GE$ :  $y=-x+1$  και η κορυφή  $B$  έχει συντεταγμένες  $(-2,1)$ .
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του  $B$  ως προς την ευθεία  $y=2x$
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών  $A$  και  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
139. Να βρείτε τις τιμές των  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  για τις οποίες οι ευθείες  $\epsilon_1: x+\mu y+1=0$  και  $\epsilon_2: 2\mu x+2y+\lambda=0$  είναι παράλληλες και η απόστασή τους είναι ίση με  $2\sqrt{2}$ .
140. Α. Δίνεται η εξίσωση  $x^2-y^2+6x+9=0$
- α) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$
- β) Να δείξετε ότι οι ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  είναι κάθετες
- γ) Να βρείτε ένα σημείο  $M(k,\lambda)$  με  $k>0$  και  $\lambda>0$  τέτοιο ώστε το διάνυσμα  $\vec{\alpha}=(3,k)$  να είναι παράλληλο προς μία από τις δύο ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  και το διάνυσμα  $\vec{\beta}=(-16,4\lambda)$  να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.
- Β. Δίνεται η εξίσωση:  $6x^2-y^2=xy$  (1)
- α) να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνουν δύο ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$
- β) να βρείτε την οξεία γωνία  $\theta$  που σχηματίζουν οι ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\epsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $M(0,1)$  και τέμνει τις ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντιστοίχως, ώστε το σημείο  $M$  να είναι μέσο του  $AB$ .
141. Δίνονται οι ευθείες  $\epsilon_1: y=x+5$ ,  $\epsilon_2: y=10$ . Έστω  $A$  το σημείο τομής των ευθειών  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  αντίστοιχα. Να βρείτε:
- α) ένα σημείο  $\Gamma(x,10)$  της ευθείας  $\epsilon_2$  έτσι ώστε να ισχύει:  $\vec{BA} \cdot \vec{B\Gamma} = 0$
- β) τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{AB}$  και  $\vec{AD}$
- γ) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $\Delta(10,10)$  και είναι κάθετη προς την ευθεία  $\epsilon_1$ .
142. Τα έσοδα  $y$  (σε χιλιάδες ευρώ) μιας εταιρείας από τις πωλήσεις ενός προϊόντος,  $x$  χρόνια μετά την έναρξη κυκλοφορίας του προϊόντος στην αγορά, περιγράφονται από την ευθεία  $\epsilon_1: y=2x$ , ενώ η ευθεία  $\epsilon_2$ , που διέρχεται από τα σημεία  $A(0,2)$  και  $B(4,6)$  περιγράφει τα αντίστοιχα έξοδα της εταιρείας για το προϊόν αυτό.
- α. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  της ευθείας  $\epsilon_2$ .
- β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\epsilon_2$ .
- γ. Να βρείτε τα έσοδα και τα έξοδα της εταιρείας 1 χρόνο μετά την έναρξη κυκλοφορίας του προϊόντος. Ποια θα είναι τα έξοδά της 3 χρόνια μετά την έναρξη κυκλοφορίας του προϊόντος;

143. Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς  $Oxy$ , η εξίσωση ευθείας:  
 $(\lambda-1)x+(\lambda+1)y-(\lambda+3)=0$ , όπου  $\lambda$  πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος  $\Phi$ .
- α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου  $\Phi$ .
  - β. Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία  $K(2,2)$ ,  $L(-1,5)$  και  $M(1,3)$ . Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται τα πλοία  $K$ ,  $L$  και  $M$ .
  - γ. Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία  $K$  και  $L$  βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο  $M$ .
  - δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο  $\Phi$  και από τα πλοία  $L$  και  $M$ .
144. Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda^2-1)x+2\lambda y-\lambda^2-2\lambda-\gamma=0$  όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $\gamma$  πραγματική σταθερά.
- α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.
  - β. Εάν  $\gamma=-1$ , να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο.